数学哲学小史

从柏拉图到格罗滕迪克

———九种思想路线的比较———

编著

2026 年 5 月 25 日

前言

数学是什么? 这是一个看似简单却极难回答的问题。问一位工程师，他会说数学是工具；问一位中学教师，她会说数学是公式与定理；问一位哲学家，他会陷入沉默——因为这正是两千多年来无数最聪明的头脑仍在争论的问题。

本书是一本关于数学哲学的小书。它不打算穷尽这一领域所有的细节，而是试图以一种清晰、可读的方式，梳理从古希腊到 21 世纪以来，人类关于“数学是什么、数学如何被认识、数学为何有效”这三大问题的主要回答。

全书共十六章。前两章勾勒数学哲学的基本问题与西方古典源头；第三章作为一个并行的视角，专门介绍中国古代数学的算法传统及其哲学评价；接下来八章逐一介绍主要流派——柏拉图主义、逻辑主义、形式主义、直觉主义、结构主义、俄罗斯几何—物理学派、格罗滕迪克的范畴—结构主义、Atiyah 的美与统一哲学；第十二章介绍 20 世纪后期的准经验主义与 21 世纪的同伦类型论；第十三章是一篇相对独立的批判性反思，讨论当代数学叙事过度聚焦于“解决猜想”所带来的扭曲；第十四章把视角转向数学的出版、传播与共同体，讨论前述每一条哲学路线如何塑造数学的物质形态（教科书体例、期刊制度、协作模式、形式化证明库）；第十五章以表格与论述并重的方式，把所有路线放在一起比较，并讨论它们之间可能的对立与综合；第十六章独立讨论 21 世纪正在发生的变革——人工智能对数学研究与教育的冲击，以及由此对前面诸哲学问题的回响。

本书的两个特色值得提前说明：

第一，**特别重视 20 世纪下半叶的两条对立路线**——以 V. I. Arnold 和 S. P. Novikov 为代表的俄罗斯几何—物理传统，和以 A. Grothendieck 为代表的法国范畴—结构传统。这两条路线在表面上都“反对形式主义”，但实际上走向了完全相反的方向；理解这一对立，就理解了当代数学最深的精神张力。

第二，**始终采用比较的视角**。每一章在介绍一种流派时，都会回顾它与前面流派的关系；第十五章则把所有流派放在一张大表里通观对照。我们相信，数学哲学不是一套孤立教义的并列，而是一场两千多年的对话。

阅读本书不需要专业的数学训练。少量出现的数学概念（如概形、上同调、KAM 定理）只在举例时使用，理解大意即可，不影响哲学层面的把握。希望本书能为对数学、哲学、科学史感兴趣的读者，提供一个轻便而不浅薄的入门。

编著者谨识

2026 年 5 月 25 日

目录

第 1 章　引论：什么是数学哲学

> “数学家就像法国人：你跟他们说什么，他们都翻译成自己的语言，然后那东西立刻变成完全不同的东西。”
>
> ——歌德

1.1　三个基本问题

数学哲学（philosophy of mathematics）不是数学的延伸，而是哲学的一支。它关心的不是“如何证明费马大定理”这样的具体问题，而是更根本的、几乎是元层面（meta-level）的问题。其中最核心的有三个。

本体论问题（ontology）：数学对象——比如数 7、圆周率 π、所有素数构成的集合——*真的存在*吗？如果存在，它们存在于哪里？我们既看不见也摸不着 7，但似乎全人类的所有时代都同意 $7+5=12$。这种“存在”是一种什么样的存在？

认识论问题（epistemology）：我们如何*知道*数学真理？感官经验显然不够——我们从未“看见”过两条平行线一直延伸到无穷远。逻辑推理似乎很重要，但逻辑本身的可靠性又从何而来？数学知识为何看上去比物理知识更“必然”？

适用性问题（applicability）：数学为何*如此惊人地有效*地描述自然？物理学家维格纳（Eugene Wigner）有一篇著名文章叫《数学在自然科学中不可思议的有效性》（*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*），他指出：当数学家纯粹出于美学动机研究的对象（如复数、群论、黎曼几何），后来竟然恰好就是描述电磁、量子、引力的语言。这是巧合，还是暗示着某种深刻的形而上学？

整本数学哲学的历史，可以视为对这三个问题不同回答方式的展开。

1.2　为什么数学哲学重要

有人会问：数学家完全可以不读哲学就做出伟大的工作。这是事实。但这并不意味着哲学无关紧要。

首先，**数学家的实际工作方式总是受到某种隐含哲学的指导**。一个相信“数学对象客观存在、等待被发现”的数学家，其研究风格会与一个认为“数学只是符号游戏”的数学家截然不同。Hilbert、Brouwer、Grothendieck 之所以能成为划时代的人物，部分原因正是他们自觉地持有某种数学哲学并贯彻到底。

其次，**数学的危机往往是哲学的危机**。19 世纪末的集合论悖论、20 世纪初的基础危机、当代关于“机器证明能否算数学证明”的争论，背后都是哲学问题。

最后，**数学哲学帮助我们看清数学教育、数学文化、数学共同体的深层倾向**。例如，为什么法国学派和俄罗斯学派培养出的数学家有截然不同的风格？为什么“数学竞赛”在某些文化中被推崇而在另一些文化中被批评？这些问题归根结底都是哲学问题。

1.3 本书的进路

本书将按大致的历史顺序，介绍以下九种主要的数学哲学路线：

1. 柏拉图主义（Platonism）
2. 逻辑主义（Logicism）
3. 形式主义（Formalism）
4. 直觉主义与构造主义（Intuitionism / Constructivism）
5. 结构主义（Structuralism）
6. 俄罗斯几何—物理传统（Arnold, Novikov）
7. 格罗滕迪克的范畴—结构主义（Grothendieck）
8. Atiyah 的美与统一哲学（Atiyah）
9. 准经验主义与同伦类型论（Lakatos, Voevodsky）

每一种都将从三个角度介绍：**核心主张、代表人物与文本、优点与困难**。第十五章统一比较。

第 2 章　古典源头：从毕达哥拉斯到康德

“万物皆数。”

——毕达哥拉斯

2.1　毕达哥拉斯：数即实在

数学哲学的源头可以追溯到公元前 6 世纪的毕达哥拉斯学派。他们提出了一个惊人的论断：宇宙的本原不是水（泰勒斯）、不是火（赫拉克利特）、不是原子（德谟克利特），而是**数**。

这一论断今天听来或许过于神秘，但它包含了一个极其深刻的洞见：自然界的规律可以用数与比例来表达。当毕达哥拉斯发现弦长比为简单整数时琴弦发出和谐的音，他相信这揭示了宇宙的根本秘密：**秩序即数学，数学即实在**。

毕达哥拉斯学派后来遇到了第一次数学危机：$\sqrt{2}$ 不能表示为整数之比。这一发现据传被作为秘密保守，泄露者被处死。但无论传说真伪，这一事件标志着数学哲学的第一个核心问题已经浮现：*当我们的数学概念遇到反例时，是修改概念，还是承认实在的复杂性？*

2.2　柏拉图：数学对象在理念世界

柏拉图（公元前 427–347）把毕达哥拉斯的洞见提升为完整的形而上学。在《理想国》第七卷中，他描绘了著名的“洞穴比喻”：我们感官所见的世界只是影子，真实的存在是**理念（forms）**的世界。

数学对象正是理念的典型例子。我们在黑板上画的圆只是不完美的影子，真正的“圆”（半径处处相等的完美图形）只存在于理念世界。数学家的工作不是*创造*数学对象，而是*回忆*（anamnesis）灵魂在出生前看到过的理念。

柏拉图主义后来成为整个西方数学传统中最持久的哲学立场。从普罗克鲁斯（Proclus）到笛卡尔，从康托尔到哥德尔，从 G. H. Hardy 到 R. Penrose——大多数顶级数学家在被追问“数学对象是否真实存在”时，都会给出某种柏拉图主义的回答。

2.3　亚里士多德：数学是抽象

柏拉图的学生亚里士多德则给出了截然不同的回答。在《形而上学》中，他认为数学对象不是独立存在的理念，而是从感性事物中**抽象**（abstraction）出来的。

我们看到三个苹果、三个人、三颗星星，从中抽掉具体的“苹果性”“人性”“星性”，剩下的就是“3”。数不是先于事物存在的，而是依附于事物、又被心灵从事物中抽离出来的。

这一立场在中世纪经院哲学中长期占主导，它的现代回声出现在经验主义传统中（如 J. S. Mill 认为数学定理不过是对物理事实的高度概括）。亚里士多德路线的优点是不必假设一个神秘的理念世界，缺点是难以解释数学的*必然性*：如果“3”只是从经验中抽象出来的，为什么 $7 + 5 = 12$ 在所有可能世界都成立？

2.4　欧几里得：公理化的诞生

公元前 3 世纪左右，欧几里得（Euclid）写出了《几何原本》（*Elements*）。这部书的伟大不仅在于它的内容——更在于它确立了一种全新的数学组织方式：**公理化方法**。

从五条公设和五条公理出发，欧几里得演绎出几百条定理。这种方法假设：数学知识的结构是*从绝对自明的真理出发，通过严格逻辑推理得到所有进一步的真理*。

这一方法论统治了西方数学两千多年，直到 19 世纪非欧几何的发现才动摇了它的"绝对自明性"前提。但作为一种数学组织原则，公理化方法至今仍是数学的标准范式——从希尔伯特的几何公理化到布尔巴基的整体重建，再到当代的同伦类型论，都是欧几里得精神的延续。

2.5　康德：数学是先天综合判断

跨越漫长的中世纪和近代早期，我们直接来到 18 世纪的康德（Immanuel Kant, 1724–1804）。在《纯粹理性批判》中，康德提出了对数学性质的一个极具影响的论断：**数学是先天综合判断（synthetic a priori）**。

"先天"（a priori）意味着不依赖于经验，"综合"意味着不只是分析（即谓词不已经包含在主词中）。一个分析判断的例子是"单身汉是未婚的"——谓词"未婚"已经包含在主词"单身汉"之中，无需经验也无需新的信息。一个综合判断的例子是"这朵花是红的"——谓词"红"不能从"花"的概念中分析出来，需要经验。

康德认为，"$7 + 5 = 12$"既不是分析的（因为 12 不能从 7 和 5 的概念中分析出来），也不是经验的（我们不必反复数才知道它）。它是先天综合的。这种判断之所以可能，是因为我们的心灵中有两种"先天直观形式"：**时间**（算术的基础）和**空间**（几何的基础）。

康德的这一立场在 19 世纪非欧几何发现之后受到严重冲击——如果几何空间不是唯一的（欧氏几何之外还有罗巴切夫斯基几何、黎曼几何），那么"空间"就不是康德所设想的那种唯一的先天直观。但康德的精神——*数学的可靠性必须有某种来自心灵结构的保证*——后来在直觉主义那里得到了回响。

第 3 章　中国古代数学：算法传统与实用理性

“析理以辞，解体用图。”

——刘徽，《九章算术注》序

如果说希腊数学以**公理—演绎**为基本范式，那么与之并行而独立发展的中国古代数学则呈现出另一种迥然不同的面貌：**以算法为核心、以问题为驱动、以构造性程序而非公理体系来组织知识**。这一传统从《周髀算经》《九章算术》到刘徽、祖冲之、秦九韶、朱世杰，绵延两千余年，其精神气质与今天的计算数学、算法数学竟有惊人的相通之处。

本章选取四个具有代表性的成就——十进位值制计数法、中国剩余定理、刘徽的割圆术、祖冲之的圆周率计算——加以考察，并在最后一节从数学哲学的视角对这一传统作出评价。

3.1　十进位值制计数法

人类历史上曾出现过多种计数体系：巴比伦的 60 进制、玛雅的 20 进制、罗马的非位值加减制、古埃及的十进非位值制。但真正同时具备**十进**与**位值**两大特征、并配以独立的零号的体系，是在中国与印度先后发展起来的——而中国的位值制有据可查的使用至迟可上溯到商代甲骨文，至春秋战国时期的**算筹**（筹算）已臻成熟。

算筹用纵横两种摆法区分相邻数位（纵式表示个位、百位、万位，横式表示十位、千位），空位即表示零，因而天然实现了位值制。这一系统的关键意义在于：

(1) **运算的可机械化**：加减乘除、开方、解线性方程组的步骤可以化为对筹码的有限操作序列；

(2) **进位与递归**：位值制使大数的表示与运算复杂度只随位数线性增长，而非如罗马数字那样组合爆炸；

(3) **抽象数概念的隐含奠基**：同一根算筹在不同位上代表不同的值，迫使思维区分数本身与数的表示。

法国数学家 Laplace 曾评论印度—阿拉伯数字系统：“这一巧妙的方法用十个记号便能写出任何数… 它的简单性使整个算术得以充分发展，因此值得列入人类最有用的发明。”这一评价同样适用于其更早的中国先声。

3.2　中国剩余定理

《孙子算经》（约公元 4–5 世纪）卷下载有一道著名问题：

> 今有物，不知其数。三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二。问物几何？

孙子给出了**口诀式**的解法：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知。”即

$$N \equiv 70\cdot 2 + 21\cdot 3 + 15\cdot 2 = 233 \equiv 23 \pmod{105}.$$

其中 $70 = 2\cdot 5\cdot 7$ 满足 $70 \equiv 1 \pmod 3$、$\equiv 0 \pmod{5,7}$，余仿此。

这一解法的一般形式由南宋秦九韶在《数书九章》(1247）的**大衍求一术**中给出。秦九韶的贡献不仅在于处理两两互素的情形，更在于以**大衍总数术**系统地把一般（不必两两互素）的模数化归为互素情形，再求解同余方程组

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

并以辗转相除（“求一”) 构造性地求出每个 $M_i = \prod_{j\neq i} m_j$ 在 m_i 下的逆元。其精神与现代代数中的 **Chinese Remainder Theorem** ($\mathbb{Z}/m_1m_2\cdots m_k \cong \prod_i \mathbb{Z}/m_i$) 完全一致，但表达方式截然不同：秦九韶给出的是一段**可执行的程序**，而非一条抽象的同构断言。

值得注意的是，大衍求一术不仅是一道趣味题的解法，秦九韶在书中明确将其用于历法推算、军事密码、赋税分摊等实际问题——这是中国数学传统的典型风格：定理寓于算法，算法服务于事。

3.3　刘徽的割圆术

公元 263 年前后，三国时期的刘徽为《九章算术》作注。在“圆田术”一节，他批评了书中沿用的“周三径一”（即 $\pi \approx 3$）的粗略估计，提出了载入数学史的**割圆术**：

> 割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。

其方法是：从圆内接正六边形出发，逐次将边数加倍（$6, 12, 24, 48, 96, \ldots$），用勾股定理递推计算每一步的边长 a_{2n} 与面积。设半径 $r = 1$、n 边形边长为 a_n，则

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

刘徽算至正 192 边形，得

$$3.141024 < \pi < 3.142704,$$

并提出取 $\pi \approx 157/50 = 3.14$ 为“徽率”。他甚至进一步指出：随着边数无限增加，内接多边形的面积*趋于*（“合体而无所失”）圆的面积。

这一论述蕴含了两个深刻的思想：

(1) **极限观念的萌芽**：“割之又割，以至于不可割”是中国数学史上对极限过程最清晰的表述。与之最近的西方对应是阿基米德（公元前 3 世纪）的“穷竭法”，两者独立得出；而极限与积分的系统理论要到 17 世纪欧洲（Cavalieri、Newton、Leibniz）才成熟；

(2) **构造性证明**：刘徽并非先验地断言 π 存在，而是通过显式的递推程序逼近它——这是典型的“构造性”数学。

3.4　祖冲之的圆周率

刘徽之后约两百年，南北朝的祖冲之（429–500）将割圆术推进到惊人的精度。据《隋书 · 律历志》记载，祖冲之“更开密法，以圆径一亿为一丈”，给出了 π 的盈、朒两个估计：

> 圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。

换算为现代记法（盈为上界、朒为下界）：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

这一精度领先世界近一千年（直到 15 世纪波斯数学家 al-Kāshī 与 16–17 世纪荷兰数学家 Ludolph van Ceulen 才超过）。祖冲之还给出了两个著名的有理逼近：

- **约率**：$\pi \approx 22/7 \approx 3.142857$；
- **密率**：$\pi \approx 355/113 \approx 3.1415929$。

密率 355/113 是 π 的极佳有理逼近：它是 π 连分数展开的一个收敛子（具体而言是 $[3; 7, 15, 1]$ 这一截断），而其后一个收敛子的分母才跳到 33102，因此 355/113 作为分数表达式的“性价比”极高。这一数对的获得很可能依赖于某种**连分数算法**的雏形，但祖冲之的具体方法（《缀术》一书）已于唐代失传，是中国数学史上最大的悬案之一。

祖冲之的儿子祖暅（与其父合称“祖氏”）进一步提出了著名的**祖暅原理**：“幂势既同，则积不容异。”即两个立体若被任意平行平面所截得的截面面积处处相等，则二者体积相等。这正是后来由 17 世纪意大利数学家 Cavalieri 独立发现的不可分量原理的等价表述。

3.5　数学哲学的评价

回到本书的主题：如何从数学哲学的角度看待这一传统？

一、算法主义的原型

中国古代数学最鲜明的特征是**算法导向**：定理几乎总是以“术”（即解题程序）的形式出现——方程术、开方术、大衍求一术、割圆术、招差术。这与希腊式的“定理 + 证明”形成对照，却惊人地预示了 20 世纪的**算法数学**（algorithmic mathematics）与**构造主义**（参见本书“直觉主义与构造主义”一章）的精神。Bishop 在 1967 年的《构造性分析基础》中说：“数学的意义存在于其计算之中。”刘徽两千年前的“析理以辞，解体用图”可作其遥远的回响。

二、问题驱动而非公理驱动

《九章算术》以 246 个实际问题（田亩、粮米、工程、税赋、军旅）组织全书，从问题中归纳出“术”。这与欧几里得自公理出发的演绎结构截然不同。这一进路常被批评为“缺乏理论性”，但近年来 Lakatos 式的**准经验主义**（参见本书“准经验主义与同伦类型论”一章）以及 Gowers 关于“两种文化”（理论型与问题型数学家）的论述，已经为这种问题驱动的传统提供了重要的哲学辩护：*数学不必然以公理化的方式生长，也可以以问题—算法—改进的方式生长。*

三、极限思想的早熟与未结实

刘徽“割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失”的论述，几乎触及了 ε–δ 极限定义的核心直观；祖暅原理在不可分量层面达到了与 Cavalieri 等价的严格度。然而，这些萌芽未能在中国本土发展为系统的**微积分理论**。原因是多方面的：缺少符号代数的支撑、缺少与运动

学/天文学的紧密耦合（如开普勒—伽利略—牛顿的链条）、缺少职业化的数学共同体。这提醒我们：*思想的萌芽与理论的成熟之间，需要整套社会—技术—符号的基础设施*。

四、对柏拉图主义的天然距离

中国古代数学家几乎从不追问"数是否真实存在""圆是否在理念世界中"之类的问题。他们关心的是"此田几何""此粟几石""此率几何"。这并不意味着他们是朴素的经验主义者——刘徽在割圆术中显然在讨论一个理想的圆，而非任何实际的圆——而是他们的哲学背景（儒家的实用理性、道家的过程论、墨家的逻辑—工艺传统）使"抽象对象的存在论"并未成为一个核心问题。但要注意：*不追问本体论与主张本体论上不存在*是两回事，因此把这一姿态等同于当代的虚构主义（fictionalism，主张数学陈述字面为假而仅是有用虚构）是不准确的。更恰当的刻画是一种**本体论上的不可知或沉默姿态**（ontological agnosticism/quietism）——亦可称为**实践—实用主义**：数学的合法性来自其实践效力，而非来自对抽象对象存在性的形而上学辩护。这一姿态与后期 Wittgenstein 把数学视为"生活形式"中的实践、以及 Maddy 式的数学自然主义，有更深的亲缘。

五、对当代的启示

在人工智能与计算数学迅速重塑数学实践的今天（参见本书"人工智能时代的数学"一章），中国古代数学的算法传统获得了新的当代意义：

- **算法即定理**：在形式化证明助手（Lean, Coq）与机器证明的时代，"一段可执行的程序"与"一条被证明的定理"的距离正在缩小，这正是中国传统数学的本来面貌；
- **问题—驱动的研究**：数据科学、密码学、组合优化等领域的发展更接近"九章"而非"原本"的范式；
- **多元数学文化的承认**：将世界数学史看作希腊—欧洲单一线索的叙事正在被修正，中国、印度、阿拉伯传统的并行与互动正在被重新评估。

承认这一切，并不是要回到"古已有之"的民族主义夸耀，而是要从中提取*对当下数学哲学仍有效的洞见*：数学不只是公理—演绎，也是算法—构造；数学不只是发现永恒理念，也是解决现实问题；数学的伟大有不止一种样态。

第 4 章　柏拉图主义：永恒理念中的数学

“我相信，数学的实在独立于我们而存在，我们的职责是发现或观察它。”
——G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

4.1　现代柏拉图主义的核心论题

现代柏拉图主义（也称数学实在论，mathematical realism）的核心主张可以浓缩为三条：

(1) **存在论独立性**：数学对象（数、集合、函数、流形等）独立于人类心灵和物理世界而存在；

(2) **真值客观性**：数学陈述具有客观真值，不依赖于我们是否能证明它；

(3) **发现论**：数学家的工作是*发现*已经存在的真理，而不是*发明*新的对象。

第三条最具直觉吸引力。许多顶级数学家在描述自己的研究经验时都说：“我感觉这些定理是*被找到*的，不是*被造出来*的。”Hardy 在《一个数学家的辩白》（*A Mathematician's Apology*, 1940）中写道：“素数 317 是素数，不是因为我们这样想，也不是因为我们的心灵是这样塑造的，而是因为它就是这样——因为数学实在就是这样建造的。”

4.2　哥德尔的数学直觉

20 世纪柏拉图主义最重要的辩护者是哥德尔（Kurt Gödel, 1906–1978）。他不仅以哥德尔不完备定理改变了数学基础研究，也以一种激进的柏拉图主义改变了数学哲学。

哥德尔认为：

> *“尽管数学对象远离感官经验，我们确实有某种类似感知的东西——也即数学直觉——使我们能够直接把握数学对象。我看不出有什么理由对这种感知的可靠性比对感官知觉的可靠性更少信心。”*

哥德尔不完备定理本身——*任何包含基本算术的一致形式系统中都存在该系统不能证明也不能证伪的真命题*——在他看来正是柏拉图主义的强证据：**真理超越证明**。如果数学只是形式游戏，哪里来的“虽然不可证但仍然真”的命题?

4.3　当代数学家中的柏拉图主义

当代许多顶级数学家在哲学上是（公开或暗中的）柏拉图主义者：

- **Roger Penrose**：在《皇帝新脑》《通向实在之路》中，提出“三个世界”图景——物理世界、心灵世界、数学的柏拉图世界——三者互相奠基。
- **Alain Connes**：在与神经生物学家 Changeux 的对话中坚持，原始数学实在（“réalité mathématique archaïque”）独立于人类心灵存在。

- **Yuri Manin**：把数学比作“一片可被探索的大陆”。
- **V. I. Arnold**：把数学对象看得和物理粒子一样真实（详见第九章）。

4.4 柏拉图主义的困难

尽管柏拉图主义在数学家中流传广泛，它在哲学上面临严重困难。最尖锐的挑战来自 1973 年 Paul Benacerraf 的论文《数学真理》（*Mathematical Truth*）。Benacerraf 指出一个两难：

Benacerraf 困境：

- 如果我们采用一种统一的、与其他知识相容的真理理论（如塔斯基语义学），那么数学陈述的真值依赖于抽象对象的存在；
- 但如果数学对象是抽象的、非时空的，那么我们与它们没有任何因果接触，我们怎么可能认识它们？

简言之：要么放弃统一的真理论，要么放弃数学知识的可能性。柏拉图主义者必须在这两个不令人满意的选项中做选择。

哥德尔诉诸“数学直觉”作为一种特殊的认知能力，但这种说法令许多哲学家感到神秘主义色彩过浓。后来的柏拉图主义者（如 Penelope Maddy 早期工作）尝试把数学对象“具象化”为集合、再把集合定位于物理世界，但这条路充满困难。

无论如何，柏拉图主义作为**数学家心理上最自然的立场**，其顽强生命力本身就是一个值得思考的现象。

第 5 章　逻辑主义：把数学还原为逻辑

"数学就是逻辑。"

——Bertrand Russell

5.1　弗雷格的雄心

19 世纪末，德国数学家弗雷格（Gottlob Frege, 1848–1925）提出了一个惊人的构想：**算术可以完全还原为逻辑**。如果这个构想成立，那么数学就不再是一门独立的学科，而只是逻辑的一个分支；数学真理的必然性也就有了最坚实的基础——因为没有什么比逻辑更必然。

弗雷格在《概念文字》（*Begriffsschrift*, 1879）中发明了现代数理逻辑——量词、变元、形式化推理规则——这一发明本身就足以使他名垂青史。然后，他在《算术基础》（*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884）和《算术基本定律》（*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893/1903）中，试图把整个算术建立在纯逻辑基础上。

弗雷格的核心思想是：**数是概念的外延**。例如，"2"被定义为"与某个恰好包含两个元素的概念等数"这一二阶概念的外延——直观地说，就是*所有两元素类的类*。而"恰好包含两个元素"以及"等数"（一一对应）这些性质本身都可以纯用逻辑（量词与等词）定义。如此一来，自然数就完全从逻辑中"长"出来了。

5.2　罗素悖论与弗雷格的悲剧

正当弗雷格《算术基本定律》第二卷即将付印时，他收到了一封改变命运的信。年轻的英国哲学家罗素（Bertrand Russell, 1872–1970）发现了弗雷格系统中的一个致命悖论：

罗素悖论：考虑"所有不属于自身的集合"构成的集合 R。问：R 属于自身吗？如果 $R \in R$，则按定义 $R \notin R$；如果 $R \notin R$，则按定义 $R \in R$。两种情况都导致矛盾。

弗雷格在第二卷的附录中悲壮地写道：

> "一位科学家所遇到的最不愉快的事情，莫过于在他的工作即将完成时，发现整个大厦的基础动摇。"

弗雷格此后再未做出重要工作，逻辑主义的第一次尝试以悲剧告终。但罗素并没有放弃。

5.3　罗素与怀特海：《数学原理》

罗素与导师怀特海（Alfred North Whitehead）合作，用十年时间写出了三卷本的《数学原理》（*Principia Mathematica*, 1910–1913）。这部巨著试图通过引入"**类型论**"（theory of types）来回避罗素悖论：把对象按层级分类，避免"集合包含自身"这类自指构造。

《数学原理》是数学史上最雄心勃勃的系统化工程之一。著名的例子是：在第一卷命题 $*54 \cdot 43$ 中，他们正式给出了 $1+1=2$ 所需的关键引理，并在旁注中写道："以上命题偶尔有用。"——这一证明在第二卷（命题 $*110 \cdot 643$）才被真正完成。

但《数学原理》的成功是有代价的。为了避免悖论，罗素必须引入“**可还原公理**”(axiom of reducibility)，这条公理本身似乎并不具有逻辑的纯粹性。批评者（如 Wittgenstein, Ramsey）指出：可还原公理与其说是逻辑真理，不如说是一种*实质*假设。

5.4　逻辑主义的命运

1931 年，哥德尔不完备定理给逻辑主义带来了更深的打击：*任何包含基本算术的一致形式系统中，都存在该系统不能证明的真命题*。这意味着：算术真理的总体不可能通过任何逻辑系统完全把握。逻辑主义最初的雄心——把全部算术真理还原为逻辑——*原则上不可能实现*。

逻辑主义因此在 20 世纪中叶逐渐式微，但它留下了不可磨灭的遗产：

- 现代数理逻辑（弗雷格、罗素的发明）；
- 类型论（罗素），这一思想后来在计算机科学和同伦类型论中复活；
- 严格分析哲学的整套方法。

近年的“**新逻辑主义**”(neo-logicism, Bob Hale, Crispin Wright 等人)尝试以“休谟原则”(Hume’s Principle: 两个概念外延等数当且仅当它们之间存在双射）为基础重建弗雷格纲领，部分技术上是成功的——但这场争论已是哲学家而非数学家的事业。

第 6 章　形式主义：希尔伯特纲领与布尔巴基

"没有人能够把我们从康托尔为我们创造的乐园中驱逐出去。"

——David Hilbert

6.1　希尔伯特的纲领

20 世纪上半叶最有影响的数学哲学是**形式主义**(formalism),其核心人物是希尔伯特(David Hilbert, 1862–1943)。

希尔伯特对数学的态度可以概括为：**数学是一场严肃的符号游戏**。数学真理不在于符号"指称"什么实在，而在于符号系统本身的*一致性*和*完备性*。一个数学系统只要内部无矛盾，它就具有"存在"的资格。

这一立场最早表现在希尔伯特对几何基础的重建(《几何基础》, *Grundlagen der Geometrie*, 1899）中。他用纯符号方式重写欧几里得，强调"*我们应该总是能够在'点'、'线'、'面'之外，用'桌子'、'椅子'、'啤酒杯'代替*"——意思是说，几何对象的本性完全由它们之间的形式关系决定，与具体"指称"无关。

6.2　希尔伯特纲领的细节

为应对 20 世纪初的数学基础危机（罗素悖论、布劳威尔的攻击），希尔伯特在 1920 年代提出了著名的**希尔伯特纲领**（Hilbert's Programme）。该纲领的核心是：

(1) **形式化**：把全部数学（包括康托尔的无穷集合论）严格形式化为一个形式系统；

(2) **一致性证明**：在一个最简单、最不可怀疑的"*有穷主义*"(finitistic）元理论中，证明这个形式系统的一致性；

(3) 一旦做到这两点，整个数学就获得了不可动摇的基础——即使其中包含无穷的对象，那些对象也只是**理想元素**（ideal elements），是为了让证明更简洁而引入的"虚构"，但整个系统的可靠性已被有穷主义地保证。

希尔伯特把这一构想表述为：*把无穷化为有穷的论证*。这是一个极其优美的哲学方案。

6.3　哥德尔的打击

1931 年，年仅 25 岁的哥德尔发表了两条不完备性定理：

第一不完备性定理：任何包含基本算术的一致递归公理化形式系统 T 中，都存在一个命题 G_T，使得 G_T 在 T 中既不可证明也不可证伪。

第二不完备性定理：进一步，这样的系统 T 不能证明它*自己*的一致性。

第二条定理对希尔伯特纲领是致命的：**我们不可能在"更简单的"系统中证明"更复杂的"系统的一致性**——除非"更简单的"系统其实更复杂。希尔伯特原本想用有穷主义元理论证明经典数学的一致性，这条路被证明在原则上行不通。

希尔伯特纲领的强版本因此宣告破产。但形式主义作为一种数学哲学并未消失——它演化出更微妙的形态。

6.4　布尔巴基与结构主义形式化

20 世纪中叶法国数学界的一个传奇集体——**布尔巴基**（Nicolas Bourbaki，一群杰出数学家共用的笔名）——以一种新的方式继承了形式主义精神。从 1939 年起，他们开始撰写一部宏大的《数学原本》（*Éléments de mathématique*），试图把整个数学严格地、统一地、从公理出发重新建立。

布尔巴基的核心信条是：**数学是关于结构（structure）的研究**。所谓结构，就是一组对象加上某些满足公理的关系（如群结构、拓扑结构、序结构）。任何具体的数学分支都是研究"集合 + 某种结构"。

布尔巴基的工作风格是：

- 极端形式化：定义—公理—定理—证明；
- 抹除几何直观：尽量用代数和集合论的语言表达一切；
- 自顶向下：从最一般的概念开始，逐渐特殊化。

布尔巴基的影响巨大：它统一了 20 世纪中叶的数学语言，培养了一代又一代法国数学家，影响波及全世界。但它也招致了猛烈的批评——尤其来自俄罗斯学派和应用数学界（详见第九章）。

6.5　形式主义的优点与代价

形式主义的最大优点是**清晰**：它不预设任何形而上学，把一切归于语法规则。这使数学摆脱了"数学对象是否存在"这种令人头疼的本体论争论，可以专心做技术工作。

形式主义的代价是**失去了对'为何'的解释**。如果数学只是符号游戏，为什么它如此有效地描述自然？为什么数学家在做研究时强烈感觉到"在发现"而不是"在玩游戏"？为什么不同的形式系统不是任意的而是有"自然"和"人为"之分？这些问题，形式主义无力回答。

更深的问题是：形式主义其实预设了一个"*元数学层面的实在*"——形式系统、推导规则、一致性等概念本身需要某种数学（或逻辑）来谈论。希尔伯特的"有穷主义元数学"实际上就是一个朴素的、未被还原的数学层面。形式主义因而是*自指意义上不彻底的*。

第 7 章　直觉主义与构造主义：心灵优先

“数学是心灵的活动，不是符号的操作。”

——L. E. J. Brouwer

7.1　布劳威尔的反叛

20 世纪初的数学基础危机，催生出与形式主义针锋相对的另一种激进立场：**直觉主义**（intuitionism）。其奠基人是荷兰数学家 L. E. J. Brouwer（1881–1966）。

布劳威尔的出发点是康德——但比康德更激进。他认为：**数学不是符号游戏，也不是逻辑推演，而是人类心灵在时间直观中构造数学对象的活动**。所谓“数学真理”，意味着*我们能够（或原则上能够）实际构造出一个证明*；那些“我们承认其存在但不能构造”的对象，根本不算数学。

由此，布劳威尔得出了一个惊人结论：**排中律（law of excluded middle）在涉及无穷的命题上不成立**。

经典逻辑认为，对任何命题 P，要么 P 真，要么非 P 真。但在直觉主义看来，断言“P 真”意味着我们能给出 P 的构造性证明；断言“非 P 真”意味着我们能给出 P 导致矛盾的证明。*有些命题（特别是关于无穷的）我们既不能证明也不能反驳*——对这种命题，断言“P 或非 P”是没有意义的。

7.2　庞加莱：直觉的先声

布劳威尔的立场并非凭空出现。在他之前一代，法国数学家**亨利·庞加莱**（Henri Poincaré, 1854–1912）就已经为“直觉优先于形式”的进路做了系统辩护。庞加莱在《科学与假设》（*La Science et l'hypothèse*, 1902）和《科学与方法》（*Science et méthode*, 1908）中提出三条互相关联的主张：

(1) **反对实无穷**：他对康托尔的超穷集合论持深刻怀疑，认为把无穷视为一个“已完成的整体”是一种语言上的滥用——无穷只能作为*潜在的过程*被把握；

(2) **反对逻辑主义**：他尖锐讽刺弗雷格—罗素纲领，认为把数学还原为逻辑会使数学沦为庞大的同义反复（“逻辑本身不能教给我们任何新东西”）。在他看来，**数学归纳原则**是不可还原的先天综合判断，体现了人类心灵的真正创造力；

(3) **几何的约定主义**：欧氏几何与非欧几何之间不存在“真假”，只存在“方便不方便”。我们采用欧氏几何作为物理空间的描述，不是因为它“真”，而是因为它在描述经验时最为简洁。

庞加莱的这些立场预示了布劳威尔的几乎全部核心论点。但与布劳威尔不同，他从不把直觉主义推向极端的反逻辑姿态——他依然相信经典数学的大部分内容是有效的，只是反对其形式化的过度自负。可以说，他是直觉主义*节制的先驱*。

7.3　Weyl：在 Hilbert 与 Brouwer 之间

如果说庞加莱是布劳威尔的精神先声，那么 **Hermann Weyl**（赫尔曼 · 外尔, 1885–1955）则是直觉主义与形式主义之间最深刻的中介者。Weyl 是希尔伯特最得意的学生，却在 1918 年的小册子《连续统》（*Das Kontinuum*）中走上了一条独立的道路——他提出了一种比 Brouwer 温和、但仍然构造性的**谓词性分析**（predicative analysis）：实数不应被定义为任意的无穷集合，而只能通过*此前已经构造好的*对象逐步生成。这一立场避免了集合论的非直谓循环，又保留了大部分经典分析的内容。

1921 年，Weyl 发表《关于数学的新基础危机》（"Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik"），公开倒向 Brouwer 一边，宣称：

> "*Brouwer——这就是革命！*"

这篇文章使他与导师希尔伯特公开决裂，也加剧了 1920 年代的 "基础之争"。然而，Weyl 后期态度趋于温和——他承认希尔伯特纲领的部分价值，同时也不放弃对构造性内容的偏爱。这种*两栖立场*使他成为 20 世纪数学哲学中最难归类、也最具桥接意义的人物。

Weyl 的独特之处还在于：他不仅是基础研究者，更是把数学与物理深度结合的大师（Weyl 规范理论、对称性原理、广义相对论的数学化）。在他身上，**基础关怀**与**物理直觉**并不冲突——这一姿态在后来俄罗斯学派（第九章）那里以另一种形式得到回响。Weyl 在《对称》（*Symmetry*, 1952）和《数学与自然科学的哲学》（*Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 1927）中表达的核心信念是：*数学的可靠性最终来自它与人类经验、与物理实在的双重锚定*——既不能完全脱离构造性直觉，也不能完全脱离对自然的描述。

7.4　直觉主义对经典数学的削减

接受直觉主义意味着对经典数学的大规模削减：

- 大量经典证明（依赖反证法和排中律的证明）必须被抛弃或重写；
- 实数理论必须重建（Cantor 式的实数构造涉及非构造性选择）；
- 选择公理被拒绝；
- 许多存在性定理变得无效——你说"存在某个 x 使得 $P(x)$"还不够，必须*给出*这个 x。

著名的例子：经典数学家很容易"证明"存在两个无理数 a, b 使得 a^b 是有理数（用 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是否有理来分情况讨论，无论是与否都能给出例子）。但这个证明是非构造性的——结束时，我们*不知道*究竟是哪一对 (a, b)。直觉主义者会拒绝这个证明。

希尔伯特对布劳威尔的反应非常激烈。他说："拒绝排中律就像拒绝拳击手用拳头一样——你剥夺了数学家的工具。"希尔伯特于 1928 年通过重组《数学年刊》（*Mathematische Annalen*）编委会将布劳威尔排除在外，引发了所谓的"**基础之争**"。

7.5　Heyting 的形式化

布劳威尔本人对形式化抱有怀疑（他认为数学的真正内容是心灵活动，不是符号），但他的学生 Arend Heyting 在 1930 年代把直觉主义形式化为**直觉主义逻辑**。Heyting 通过 BHK 解释（Brouwer–Heyting–Kolmogorov interpretation）给逻辑联结词以构造性意义：

- $A \wedge B$ 的证明 = 一个 A 的证明加上一个 B 的证明；
- $A \vee B$ 的证明 = 要么是 A 的证明，要么是 B 的证明（且明确指出是哪个）；
- $A \to B$ 的证明 = 一个把 A 的证明变成 B 的证明的方法；
- $\neg A$ 的证明 = 一个把 A 的证明变成矛盾的方法。

直觉主义逻辑因而具有一种本质的"算法性"——这后来被发现与计算机科学有深刻联系(Curry–Howard 同构：证明即程序)。

7.6　Bishop 的构造主义

1967 年,美国数学家 Errett Bishop 出版了《构造性分析基础》(*Foundations of Constructive Analysis*)，开创了 **Bishop 式构造主义**。Bishop 的关键洞察是：*大部分经典分析的实际内容可以重写为构造性的*，只要我们愿意更小心地处理证明。

与布劳威尔不同，Bishop 没有奇异的形而上学，也不接受布劳威尔的某些有争议的"自由选择序列"。他只是要求：**每一个存在性定理都必须给出构造方法**。结果，他几乎重写了整个数学分析的标准内容，证明了大部分经典定理的构造版本是可能的。

7.7　构造主义的现代回响

直觉主义与构造主义在 20 世纪后期获得了意外的复兴——不是来自哲学，而是来自**计算机科学**。

Curry–Howard 同构发现：直觉主义逻辑中的"命题"对应于程序设计中的"类型"，"证明"对应于"程序"。这一发现使直觉主义成为现代类型论、定理证明助手（Coq、Agda、Lean）、以及形式化数学的理论基础。

更激进的发展是 Vladimir Voevodsky 在 2010 年代提出的**单价基础**（Univalent Foundations）——一种基于同伦类型论的新数学基础，本质上是构造主义的（详见第十二章）。

直觉主义因此从一个"少数派的怪异立场"变成了 21 世纪数学基础研究的核心方向之一。这是 20 世纪数学哲学最戏剧性的反转。

第 8 章　结构主义：从布尔巴基到范畴论

"一切都是结构。"

——Saunders Mac Lane

8.1　结构主义的基本主张

结构主义（structuralism）是 20 世纪后期最重要的数学哲学之一。其核心论题是：**数学研究的不是孤立的对象，而是结构**。一个"自然数"不是某种独立存在的实体；它的全部本质都体现在它在自然数结构（一个起点 0 加上后继函数）中所占的位置。

这一立场可以追溯到 Dedekind 在 19 世纪末提出的著名问题："数是什么？"（*Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888）。Dedekind 给出了一个革命性的回答：自然数不是任何特定的对象，而是*满足 Peano 公理的任何结构中各位置的占据者*。任何两个满足 Peano 公理的系统都是同构的（这正是 Dedekind 范畴性定理），所以"自然数"在结构同构意义下是唯一的。

8.2　布尔巴基的结构主义

如第六章讨论形式主义时所述，布尔巴基把结构主义发展为一项系统工程。在他们的视野中，数学的全部内容可以归结为三大**母结构**（structures mères）：

(1) **代数结构**：群、环、域、模等；

(2) **序结构**：偏序、全序、格等；

(3) **拓扑结构**：拓扑空间、度量空间等。

具体的数学分支被理解为这些母结构的各种叠加和特殊化。例如，实数 $\mathbb{R}$ 同时具有代数结构（域）、序结构（全序）、拓扑结构（标准拓扑），且这些结构相容。

布尔巴基的结构主义有强烈的**自顶向下**倾向：先建立最一般的结构概念，然后特殊化到具体例子。这与传统的"从具体例子归纳出一般规律"的进路截然相反。

8.3　范畴论：结构主义的升级版

1945 年，Eilenberg 与 Mac Lane 在研究代数拓扑时发明了**范畴论**（category theory）。这本来只是为了简化某些自然变换的描述，但很快演化为一种全新的数学语言。

范畴论的核心观点是：**对象本身不重要，重要的是对象之间的态射（morphism）**。一个范畴由一组对象、对象之间的态射（满足结合律和单位律）构成。重要的不是某个特定的群是什么，而是群范畴（以群为对象、以群同态为态射）的整体结构。

范畴论是结构主义的彻底贯彻：*连"结构是一个集合加上某些关系"这种说法都被超越了——结构本身只是一种抽象模式。*

范畴论的关键技术工具是：

- **函子**（functor）：范畴之间的"结构保持映射"；
- **自然变换**（natural transformation）：函子之间的映射；
- **伴随**（adjunction）：两个函子之间的特殊关系，如同对偶；
- **极限与上极限**：范畴中的"普遍构造"；
- **米田引理**（Yoneda lemma）：范畴论的核心定理，"一个对象的全部信息编码在它与其他对象的关系中"。

范畴论的哲学含义极其深刻：**米田引理**事实上是结构主义的数学化身——*一个对象的本质完全由它与其他对象的关系决定*。

8.4　Mac Lane 与"工作中的范畴学家"

Saunders Mac Lane（1909–2005）在《工作中的范畴学家》（*Categories for the Working Mathematician*, 1971）中系统化了范畴论。他公开宣称：*范畴论应该取代集合论作为数学的基础*。

这一主张引发了长期争论。集合论传统的拥护者（如 Solomon Feferman）认为：范畴论本身需要某种集合论才能严格定义，所以范畴论不能完全取代集合论。范畴论拥护者则反驳：现代数学的实际结构已经是范畴的，集合论只是历史上的一种"基础选择"，并非唯一可能。

这一争论在 21 世纪以一种新的形式延续：同伦类型论（Homotopy Type Theory, HoTT）和单价基础（详见第十二章）正在把范畴论—结构主义推向新的高度。

8.5　Grothendieck：结构主义的极致

Grothendieck（1928–2014）将结构主义推到了前所未有的高度。他的核心信念是：**发现一个数学概念的"正确"普遍性，比证明任何具体定理都更重要**。

在 Grothendieck 手中，代数几何被彻底改造——从研究多项式方程组的具体解，变成研究*概形*（scheme）这一极其抽象的范畴对象。这一改造的代价是惊人的抽象：EGA 与 SGA 数千页只为了建立"语言"，几乎不证明具体定理。但回报也是惊人的：韦伊猜想被证明，数论与代数几何被统一，整个 20 世纪后半叶的代数几何走上了 Grothendieck 路线。

Grothendieck 是一种特殊的结构主义者：他不只是*使用*结构，他*相信*结构本身是数学实在的本来面貌。具体的对象只是结构在某个层面的"投影"。这一立场我们将在第十章专门讨论。

8.6　结构主义的优点与困难

结构主义的最大优点是：它**符合现代数学的实际工作方式**。从范畴论到代数几何到拓扑学，现代数学的实际操作就是寻找结构、提取共同模式、建立函子关系。结构主义不是对数学的外在哲学反思，而是对数学内在生命的描述。

但结构主义也有困难：

第一，"结构"本身需要某种东西来承载。一个结构总是"某些东西的结构"。如果完全否认对象，结构悬于空中。

第二，为什么某些结构比其他更"自然"或更"重要"？布尔巴基有"母结构"，但为什么是这些？范畴论为什么以群、拓扑空间、阿贝尔范畴为研究对象？这些选择本身需要解释。

第三，结构主义难以解释数学的**适用性**：如果数学只是结构研究，为什么物理世界恰好实例化这些结构？

无论如何，结构主义已成为 20 世纪后期及今日数学的主流哲学之一。下一章我们将看到一种与之针锋相对的传统——俄罗斯学派的几何—物理直觉主义。

第 9 章　俄罗斯学派：几何—物理直觉的传统

“数学是物理学中实验最便宜的那一支。”

——V. I. Arnold

9.1　一种鲜明的反传统

20 世纪下半叶的俄罗斯（苏联）数学学派，形成了一种与法美主流截然不同的数学哲学。如果说布尔巴基代表了形式主义—结构主义的极致，那么以 Arnold 和 Novikov 为代表的俄罗斯学派则站在了它的正对面。

俄罗斯学派的核心信念可以浓缩为一句话：**数学是自然科学的一支**。它不是孤立的形式系统，不是自我封闭的结构游戏，而是与物理、力学、几何*有机连接*的探索自然规律的活动。

9.2　思想根源：从 Lobachevsky 到 Gelfand

俄罗斯数学传统有一条清晰的精神谱系：

- **Nikolai Lobachevsky**（1792–1856）：非欧几何的发明者。但他不把非欧几何视为纯形式游戏，而是认为这是*真实物理空间可能的几何*——这一态度在当时是革命性的。
- **Pafnuty Chebyshev**（1821–1894）：圣彼得堡学派的奠基人。他强调数学应该*有用*——他既在素数分布上取得了里程碑式的成果，又亲手设计连杆机构以*改进蒸汽机*的速度调节器，体现了纯数学与机械工程并重的风格。
- **Andrey Kolmogorov**（1903–1987）：20 世纪最伟大的概率论与动力系统大师。他既能做最抽象的测度论公理化，也能解决最具体的湍流问题。
- **Israel Gelfand**（1913–2009）：莫斯科著名的 Gelfand 研讨班主持者。他把代数、几何、表示论、分子生物学融为一体，强调*数学的统一性必须通过具体例子展示*。

这一传统培养了一种特殊的“数学品味”：*重视具体例子甚于一般理论，重视几何直观甚于代数形式，重视物理动机甚于内在美*。

9.3　Arnold：反对“形式主义瘟疫”

Vladimir Arnold（1937–2010）是这一传统在 20 世纪后期最响亮的声音。他在 1997 年巴黎的著名演讲《On teaching mathematics》中尖锐批评布尔巴基传统：

> *“In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences.*

They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to schoolchildren."

（20 世纪中叶，有人试图把物理学和数学分开。结果是灾难性的。整整几代数学家在对自己学科的另一半以及所有其他科学一无所知的情况下成长起来。他们先是把丑陋的经院式伪数学教给学生，然后教给中小学生。）

Arnold 的正面主张是：

(1) **几何—物理直觉至上**：数学的真正源头在物理世界。庞加莱研究三体问题催生了拓扑学，热传导问题催生了傅里叶分析，量子力学催生了泛函分析；

(2) **先看图，再算例子，最后证明**：数学教育的正确顺序是直观 → 具体 → 一般，而不是相反；

(3) **重视 '真正的问题'** 太阳系是否稳定（KAM 定理）、流体方程的解是否光滑（Navier–Stokes 千禧问题）这些"真问题"高于任何抽象游戏；

(4) **反对过度抽象**：当一个理论已经抽象到看不见任何具体例子时，它就脱离了数学的真正生命。

Arnold 自己的工作也完美体现了这一哲学：奇点理论、KAM 定理、Arnold 扩散、辛拓扑——每一项都根植于具体的物理或几何问题。

9.4　Novikov：数学物理的统一

Sergei Petrovich Novikov（1938–2024）是 1970 年的菲尔兹奖得主。他继承并扩展了俄罗斯传统，把代数拓扑、可积系统、量子场论结合在一起。他的 Novikov–Veselov 方程、KP 方程的代数几何解，都是*用纯数学方法解决物理问题*的典范。

Novikov 多次撰文批评 20 世纪后期西方数学的"过度抽象化"。在《二十世纪后半叶及其总结：俄罗斯与西方物理与数学共同体的危机》（*Russian Math. Surveys*, 2006）一文中，他认为整整一代年轻的西方数学家——尤其是在法美代数传统中受训的——已经失去了与真实世界的联系。他们能在抽象代数和范畴论中做出精致的工作，却对源于物理的数学——流体动力学、量子场论、统计力学——一无所知。在 Novikov 看来，这不是进步而是衰退。

Novikov 特别强调**研讨班传统**——师徒之间口耳相传的活的思维传统。他认为，数学不只是论文的集合，更是一种*文化和品味*，必须通过具体的人际传承延续。

9.5　俄罗斯学派的哲学要点

总结俄罗斯学派的数学哲学，可以列出以下几点：

- **本体论**：数学对象（流形、奇点、动力系统）和物理对象一样真实；
- **认识论**：直觉来自几何图像和物理类比，证明只是验证已"看见"的真理；
- **方法论**：从具体到一般，从例子到理论；

- **价值论**：真问题高于优美抽象；
- **教育观**：重视具体计算、几何画图、物理直观，反对过早形式化。

9.6　与布尔巴基的对比

把俄罗斯学派与布尔巴基放在一起，对比格外鲜明：

维度	**俄罗斯学派**	**布尔巴基**
数学的本质	自然科学的一支	自洽的形式系统
第一直觉	几何图像、物理类比	公理与结构
证明的角色	验证已“看见”的真理	真理的唯一来源
教育方式	例子 → 图像 → 定理	定义 → 公理 → 定理
评价标准	是否揭示自然	是否优美自洽
危险倾向	沦为应用计算	沦为符号游戏

这两条路线在 20 世纪下半叶始终互相竞争，培养出风格截然不同的数学家。今日，双方都仍然活跃：俄罗斯传统延续在辛拓扑、可积系统、流体几何分析等领域；布尔巴基传统则发展为范畴论、代数几何、几何朗兰兹纲领。

第 10 章　Grothendieck：涨潮、抽象与超验

> "Discovery is the privilege of the child: the child who has no fear of being once again wrong, of looking like an idiot, of not being serious, of not doing things like everyone else."
> （发现是孩子的特权：那个不怕再犯错、不怕显得愚蠢、不怕不正经、不怕与众不同的孩子。）
>
> ——Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*

10.1　Grothendieck 其人

Alexandre Grothendieck（1928–2014）是 20 世纪最伟大的数学家之一，也是最神秘、最具争议、最具悲剧性的人物之一。他出生于柏林，父亲是俄国无政府主义者，母亲是德国左翼记者。童年在二战的颠沛流离中度过，父亲死于奥斯维辛。1950 年代他来到法国，迅速展示出惊人的数学天才。

在 1958 至 1970 年间，Grothendieck 在 IHÉS（法国高等科学研究所）领导了一场代数几何的彻底革命。他的纲领——以 *Éléments de géométrie algébrique* (EGA) 和 *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA) 为载体——重塑了整个数学领域。1966 年他获得菲尔兹奖。

但 1970 年，Grothendieck 突然离开 IHÉS（因为发现部分资助来自军方），逐渐疏离主流数学界。1991 年起他完全隐居法国南部山村，拒绝任何来访，直到 2014 年去世。在隐居期间他写下了长篇自传 *Récoltes et Semailles*（《收获与播种》），其中包含了对数学本质极其深刻的反思。

10.2　涨潮哲学

Grothendieck 最著名的比喻是关于解题方式的：

> *"I can illustrate the second approach with the same image of a nut to be opened. The first analogy that came to my mind is of immersing the nut in some softening liquid, and why not simply water? From time to time you rub so the liquid penetrates better, and otherwise you let time pass. The shell becomes more flexible through weeks and months—when the time is ripe, hand pressure is enough, the shell opens like a perfectly ripened avocado!"*
>
> （我可以用同一个坚果的意象来比喻第二种方法。我想到的第一个类比是把坚果浸在某种软化液体中，比如说水？不时搓揉让液体更好地渗透，其余时间就让时间流过。经过数周数月，壳变得越来越柔软——时机成熟时，手轻轻一按就够了，壳像一颗完美成熟的牛油果一样打开了！）

这一比喻揭示了 Grothendieck 与大多数数学家截然不同的工作方式：**他不直接攻击难题，而是不断拓宽周围的概念框架，建立越来越普遍的理论，直到原来的难题自然而然地"溶解"在新的语言与结构之中。**

这就是涨潮：海水慢慢上涨，最终将礁石淹没，无需任何强攻。

Grothendieck 把这种方法发挥到了极致。当 André Weil 在 1949 年提出关于有限域上代数簇的几个深刻猜想（韦伊猜想）时，大多数人会立刻试图用现有工具证明。Grothendieck 不。他用了二十年时间，构建了概形（scheme）、上同调（étale cohomology）、拓扑斯（topos）、动机（motif）等一整套庞大的概念机器——*然后*韦伊猜想（除最难的一条由其学生 Deligne 完成）几乎自动成立。

10.3 抽象的力量与“正确的普遍性”

Grothendieck 的另一个核心信念是：**抽象不是远离实在，而是接近实在**。他面对困难的方式是典型的：当遇到一堵墙，他不会试图把它撞破，而是追问这堵墙为什么存在、它背后是什么。如果你证明一个定理时遇到阻力，那很可能是因为*你的概念还不够普遍*——你还没找到能让定理变得”显而易见”的真正语言。这是一种与传统数学解题哲学完全相反的态度：传统认为困难是值得克服的挑战，Grothendieck 认为困难是*需要绕开的提示*。

这一信念使他建立了**概形理论**——把代数几何从研究“多项式方程的具体解集”提升到研究“任何交换环对应的几何对象”。这一推广在当时看来几乎是疯狂的：为什么要为研究椭圆曲线引入如此庞大的机器？但事后证明，这一抽象正是统一数论与几何的“正确的”语言。

类似地，他引入**拓扑斯**（topos）这一极端抽象的概念——本质上是“广义的‘空间’”——以容纳从代数几何到逻辑到物理的各种“空间性”。今日，拓扑斯理论是数学最深刻的统一框架之一。

10.4 数学是发现还是发明：Grothendieck 的柏拉图主义

Grothendieck 在《收获与播种》中表现出强烈的柏拉图主义倾向，但带有一种独特的神秘色彩。他相信：

- 数学对象客观存在；
- 数学家在最深层的工作状态中，是在*倾听*某种超越人类意志的声音；
- 真正的数学创造是一种近乎冥想的“接收”，不是主动的“发明”。

这种带有超验色彩的柏拉图主义，与他晚年对宗教、灵性的深刻兴趣是一脉相承的。它也解释了他为何最终选择彻底隐居——在他看来，世俗数学共同体的喧嚣（论文、奖项、优先权之争）已经背叛了数学的真正精神。

10.5 直觉先于严格证明

Grothendieck 强调，数学工作的真实过程是：

$$\text{直觉} \to \text{理解} \to \text{语言} \to \text{证明}$$

而不是教科书呈现的“定义 → 定理 → 证明”。他批评现代数学论文写作掩盖了真实的思维过程，把活生生的直觉探索包装成冷冰冰的逻辑推演，让读者误以为数学是从天上掉下来的，而不是从人的内心生长出来的。

他认为，一个真正理解了某个数学对象的人，**在写下第一个符号之前，心中已经“看见”了全貌**。证明只是把这个内在图景翻译成公众语言的过程。

10.6 对“技巧崇拜”的批判

Grothendieck 对 20 世纪数学界流行的“技巧崇拜”持严厉批评态度。他认为，很多被誉为“天才”的数学家不过是掌握了大量高超技巧的“杂技演员”，却缺乏对数学本质的深刻理解。

他尤其批评**以证明难题为最高荣誉**的文化。在他看来，如果一道题很难证明，那说明我们*还没有找到正确的理解方式*，而不是说这道题本身值得炫耀。这一观点直接挑战了数学竞赛文化和“解题高手”的地位。

10.7 数学与道德的统一

或许 Grothendieck 最独特、也最令人惊讶的观点是：**数学工作的方式与一个人的道德品质是不可分割的**。

真正的数学需要一种*彻底的诚实*——对自己的无知保持开放，不急于求成，不为了名誉而扭曲真理。那些追求快速发表、抢占优先权、争夺荣誉的数学家，在道德上已经背叛了数学精神，而这种道德上的妥协最终也会反映在他们工作的质量上。

这一观点解释了他为何对前学生的“背叛”如此痛苦——在他看来，这不仅仅是学术上的不公正，更是一种深层的道德失败。

10.8 Grothendieck 与俄罗斯学派的对照

Grothendieck 与上一章描述的俄罗斯学派形成了 20 世纪数学最深的对立。表面上他们有很多共同点——都反对纯形式主义、都重视直觉、都倾向某种数学实在论、都鄙视学术政治。但他们走向了相反的方向。

维度	**Arnold / Novikov**	**Grothendieck**
数学的本质	自然科学的一支	结构的科学 / 超验的发现
直觉的来源	几何—物理图像	概念—范畴框架
解题方式	几何直觉的精准打击	拓宽语言让问题溶解
抽象的态度	警惕过度抽象	抽象越高越接近真理
对难题的看法	真问题，值得攻克	难 = 视角错了
真理的检验	物理世界	内部统一性
柏拉图世界	与物理同构	纯结构 / 超验
共同敌人	布尔巴基的形式主义	教科书的伪逻辑外壳
共同信念	数学诚实是不可妥协的	同

可以这样总结：

> **Grothendieck 和 Arnold 都在反抗同一件事——数学被简化为符号游戏——但他们逃向了相反的方向。Grothendieck 向上逃，逃进越来越高的抽象，直到抽象本身成为新的直观；Arnold 向下逃，逃回伽利略和牛顿的物理大地，让数学重新接上自然的根。**

这两条路在 21 世纪仍在同时延续：Grothendieck 路线发展为同伦类型论、∞-范畴、几何朗兰兹；Arnold/Novikov 路线发展为辛拓扑、可积系统、镜像对称的物理侧、流体方程的几何

分析。当代数学最激动人心的进展（如 Kontsevich 的工作、镜像对称、几何朗兰兹的物理诠释），往往恰恰发生在**两条路重新相遇**的地方。

第 11 章　Atiyah：美、统一与数学—物理的桥梁

> "But most of all a good example is a thing of beauty. It shines and convinces."
> （但最重要的是，一个好的例子是美的事物。它闪闪发光，令人信服。）
>
> ——Michael Atiyah, *Advice to a Young Mathematician*

11.1　Atiyah 其人

Michael Atiyah（1929–2019）是 20 世纪后半叶最有影响力的数学家之一。他出生于伦敦，父亲是黎巴嫩人，母亲是苏格兰人。这种跨文化的背景深刻塑造了他的数学性格：兼容并蓄，善于在不同传统之间架桥。

Atiyah 的数学生涯横跨半个世纪。1966 年获菲尔兹奖，2004 年获阿贝尔奖——他是极少数同时拥有这两项数学最高荣誉的人。他先后在牛津、剑桥、普林斯顿高等研究院、爱丁堡任职，曾任伦敦皇家学会会长和爱丁堡皇家学会会长。

但 Atiyah 的影响远不止于他的定理。他是一位天然的数学*传教士*——他用公开演讲、综述文章、哲学随笔不断向更广泛的听众阐释数学的意义。他对数学哲学的思考虽然散见于各种演讲和访谈而非系统论著，却构成了一条独特而连贯的思想路线。

11.2　指标定理：数学统一的范例

Atiyah 最伟大的成就是与 Isadore Singer 合作的 **Atiyah–Singer 指标定理**（1963）。这个定理把三个看似无关的数学领域——*微分方程*（分析学）、*流形的拓扑不变量*（拓扑学）、*向量丛的特征类*（几何学）——统一在一个等式之中。其最经典的特殊情形是 **Hirzebruch–Riemann–Roch 定理**——即指标定理应用于复流形上的 Dolbeault 算子 $\bar{\partial}$ 时所得的形式：

$$\mathrm{ind}(\bar{\partial}_E) = \int_M \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(M)$$

这个等式说的是：$\bar{\partial}$ 算子在全纯向量丛 E 上的*分析性质*（指标，即核的维数减去余核的维数）完全由流形的*拓扑性质*（Chern 特征与 Todd 类）决定。一般的 Atiyah–Singer 指标定理将这一思想推广到任意椭圆型微分算子。

指标定理不仅是一个技术成果，更是一个**哲学宣言**。它以最壮观的方式证明了 Atiyah 毕生的信念：*数学的不同分支之间存在深层的、必然的统一*。分析、拓扑、几何不是各自独立的领域，而是同一实在的不同面向。

Atiyah 后来回忆说，指标定理最让他震撼的不是证明本身，而是定理的*存在*：为什么一个微分方程的解空间的维数，居然能用完全拓扑的语言来计算？对 Atiyah 来说，这指向了数学中一种我们尚未完全理解的深层统一。

11.3　数学与物理的联姻

如果说俄罗斯学派强调“数学源于物理”，Grothendieck 追求“数学的内在统一”，那么 Atiyah 的独特贡献在于证明了**数学与物理在最深层次上互相需要**。

1970 年代末至 1980 年代，Atiyah 开始与理论物理学家——特别是 Edward Witten——展开深入对话。这次对话产生了丰硕的成果：

- **瞬子与规范场论**：Atiyah、Drinfeld、Hitchin、Manin 利用代数几何工具解决了杨—米尔斯瞬子方程的分类问题（ADHM 构造，1978），这是纯数学方法解决物理问题的典范；Ward 的 twistor 方法为 ADHM 提供了几何上的概念前驱；
- **拓扑量子场论**（TQFT）：Atiyah 在 Witten 工作的启发下，给出了拓扑量子场论的公理化定义（1988），为量子场论与低维拓扑之间的深刻联系提供了数学框架；
- **Jones 多项式与 Chern–Simons 理论**：Witten 用物理的路径积分方法“解释”了 Jones 的纽结不变量，而 Atiyah 则帮助将这种物理直觉转化为严格的数学。

Atiyah 从这些经验中得出了一个深刻的哲学结论：

> *“The mathematical problems that have been solved or techniques that have arisen out of physics in the past have been the lifeblood of mathematics.”*
>
> （过去由物理学引发的数学问题和由此产生的技术，一直是数学的命脉。）

对 Atiyah 来说，物理学家拥有一种非凡的直觉，使他们能够在论证尚未达到数学标准的情况下”看到”数学真理。数学家和物理学家从不同侧面看到的是同一个实在。

这一立场使 Atiyah 既不同于 Arnold 的“数学是物理的分支”，也不同于布尔巴基的“数学自洽即可”。Atiyah 认为数学和物理是**平等的伙伴**，各自拥有独立的方法和标准，但指向同一个深层实在。

11.4　美作为数学的核心

在所有现代数学家中，Atiyah 对“**数学之美**”的反思最为深入和系统。他不把美看作数学的装饰品或副产品，而是将其视为数学的*本质特征*和*发现的指南针*。

Atiyah 区分了数学中的几种美：

(1) **结构之美**：一个理论用最少的公理产生最丰富的后果——如群论、Galois 理论；

(2) **联系之美**：两个看似无关的领域被揭示出深层联系——如指标定理、朗兰兹纲领；

(3) **简洁之美**：一个深刻的真理用极简的形式表达——如 $e^{i\pi} + 1 = 0$；

(4) **意外之美**：一个定理的结论出人意料，却完全自然——如素数定理。

Atiyah 认为，这些“美”不是主观偏好，而是数学实在的*客观特征*：

> *"I think the aim of a mathematician is to capture as much truth as you possibly can in small packages, a high density of truth per unit word, and beauty is a criterion.... Beauty is a measure of significance."*
>
> （我认为数学家的目标是在尽可能小的包装中捕捉尽可能多的真理——每个词的真理密度要高——而美是判断标准。……美是重要性的度量。）

当一条定理是美的，往往意味着我们触及了某种深层结构；而一条丑陋的定理，通常说明我们尚未找到正确的视角。

这一立场有明确的方法论含义：当你面对两种证明方法时，*选择更美的那个*——因为更美的证明往往揭示了更深的结构，而更深的结构意味着更多的推广和联系。这与 Grothendieck 的"涨潮哲学" 遥相呼应：正确的抽象不仅解决问题，而且让问题变得*显而易见*。

11.5 直觉、猜想与证明的辩证法

Atiyah 对数学创造过程有一种独特的理解。他在 2016 年接受 *Quanta Magazine* 采访时说道：

> *"People think mathematics begins when you write down a theorem followed by a proof. That's not the beginning, that's the end. For me the creative place in mathematics comes before you start to put things down on paper, before you try to write a formula. You picture various things, you turn them over in your mind. You're trying to create, just as a musician is trying to create music, or a poet."*
>
> （人们以为数学始于写下一个定理然后给出证明。那不是开始，那是结局。对我来说，数学的创造性环节发生在你动笔之前、在你尝试写公式之前。你在脑中描绘各种事物，反复思量。你在试图创造，正如音乐家在试图创造音乐、诗人在试图创造诗。）

这一观点将 Atiyah 与 Grothendieck 联系起来——后者也认为"直觉先于严格证明"。但 Atiyah 的直觉更依赖*物理图像*和*几何想象*，而 Grothendieck 的直觉更依赖*范畴论的抽象语言*。

但 Atiyah 的观点不止于"直觉先于证明"。他进一步主张：**证明本身必须携带理解**。正如他所说："The most important stage is understanding. A proof by itself doesn't give you understanding. You can have a long proof and no idea at the end of why it works. But to understand why it works, you have to have a kind of gut reaction to the thing. You've got to feel it."（最重要的阶段是理解。证明本身不能给你理解。你可以读完一个很长的证明，最后却不知道它为什么成立。要理解它为什么成立，你必须对它有一种直觉反应。你得*感受*它。）一个仅仅验证结论为真、却不揭示*为什么*为真的证明，在 Atiyah 看来是不完整的数学。他区分了两类证明：一类是"验证型" 证明——通过穷举、技巧或机械计算确认结论，但读完后对底层结构毫无新的领悟；另一类是"阐明型" 证明——每一步都在展示结构性的原因，读完后你不仅知道*定理成立*，而且理解*定理为何不得不成立*。Atiyah 毕生追求的是后者。在他看来，如果一个定理的证明需要一百页的技巧堆砌，那说明"正确的证明"——那个能用三页纸揭示本质的证明——还没有被找到。

这一立场与 Thurston 后来在《论数学中的证明与进步》中的观点高度吻合：数学的目的不是定理的积累，而是人类理解的深化。Atiyah 比 Thurston 更早、也更具体地实践了这一信念——他的指标定理本身就是"阐明型" 证明的典范：它不只是证明了一个等式，而是揭示了分析、拓扑、几何之间*为什么*存在深层联系。

Atiyah 还强调了**猜想在数学中的驱动作用**。他不像某些数学家那样把猜想看作待征服的堡垒，而是把猜想看作*理解的探针*——一个好猜想比它的证明更重要，因为猜想揭示了数学家对某一领域的深层直觉。

11.6　Atiyah 的哲学定位

Atiyah 的数学哲学可以从几个维度来定位：

- **本体论**：温和的柏拉图主义——数学对象是客观的，但不是孤立存在于柏拉图天国，而是与物理世界有深层的对应关系；
- **认识论**：直觉—美学驱动——直觉是发现的主要途径，美是判断方向的指南针，证明须携带理解而非仅仅验证；
- **方法论**：跨学科对话——数学、物理、几何之间的持续对话是创造力的主要源泉；
- **价值论**：统一高于一切——最重要的数学成就是揭示不同领域之间的深层联系。

与其他路线的对比

维度	Atiyah	对比
数学与物理	平等伙伴，互相启发	Arnold：物理优先；Bourbaki：数学自足
抽象的角色	统一的工具，须扎根于例子	Grothendieck：抽象本身即目标
美的地位	核心方法论指南	Hardy：旁观者的审美；形式主义：不相关
证明	须携带理解，直觉先行	逻辑主义：唯一真理来源
统一 vs. 深度	广度与联系	Grothendieck：垂直深度

Atiyah 最独特的贡献在于：他示范了一种*桥梁式*的数学实践——在代数与几何之间、在分析与拓扑之间、在纯数学与理论物理之间、在英国传统与法国传统之间不断穿梭。他的哲学本质上是一种**对话主义**：数学的生命力不在于任何单一路线的彻底贯彻，而在于不同路线之间*持续的张力与对话*。

第 12 章　准经验主义与同伦类型论

> “Mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs and refutations.”
> （数学不是通过无可置疑的定理数量的单调增长而发展的，而是通过猜测的不断改进——通过思辨与批判、通过证明与反驳的逻辑——而发展的。）
>
> ——Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*

12.1　Lakatos：证明与反驳

匈牙利—英国哲学家 Imre Lakatos（1922–1974）在 1976 年出版的《证明与反驳》（*Proofs and Refutations*）中，提出了对数学哲学传统的一次彻底冲击。

Lakatos 的核心论点是：**数学不是从公理出发的演绎系统，而是一种类似自然科学的拟经验过程**。数学发展的真实模式不是“定义 → 公理 → 定理”，而是：

(1) 从一个初始猜想出发；

(2) 给出一个看似有效的证明；

(3) 发现反例（怪物、例外）；

(4) 不断修改*定义*和*猜想*本身，使证明能涵盖更多情况；

(5) 经过反复迭代，得到一个稳定的“局部真理”。

Lakatos 用欧拉公式 $V - E + F = 2$ 的历史发展作为案例研究。这条公式最初被认为对所有多面体成立，但很快被各种“反例多面体”挑战。每一次反例出现，数学家不是简单接受失败，而是重新调整“什么算多面体”的定义。整个过程是一场猜想、证明、反驳、概念修正的辩证舞蹈。

Lakatos 因此提出了**“准经验主义”**（quasi-empiricism）：数学的实际方法论与物理学没有本质差别，都是在猜想—验证—修正的循环中前进。这与传统的“数学是必然真理的演绎”形象形成尖锐对比。

12.2　Lakatos 的影响

Lakatos 的工作改变了数学哲学的格局。它使人们意识到：

- 数学论文的“定义—定理—证明”格式掩盖了真实的发现过程；

- 数学概念不是固定的，而是在历史中演化的；
- 数学共同体的辩论与争议是数学发展的核心动力，不是外在干扰。

这与 Grothendieck 对数学论文形式的批评有惊人的呼应——尽管两人来自完全不同的传统。Lakatos 的进路更接近 Karl Popper 的科学哲学，强调可证伪性与历史性；而 Grothendieck 则保持了某种柏拉图主义的超验色彩。

12.3 Voevodsky 与单价基础

进入 21 世纪，数学哲学迎来了一场意外的革命，来自一位俄罗斯—美国数学家 Vladimir Voevodsky（1966–2017）。Voevodsky 因在代数几何与同伦理论中的工作（特别是 motivic cohomology）获得 2002 年菲尔兹奖。但在 2000 年代后期，他经历了一次深刻的思想转变，把全部精力投入数学基础研究。

事情的起因是：Voevodsky 在自己的研究中发现，几篇已发表的、被同行认可的论文中含有错误，而这些错误难以被人工检验发现。他得出结论：**现代数学已经太复杂，传统的同行评议无法保证可靠性，必须借助计算机进行形式化**。

但他不满意已有的形式化方案——无论是基于 Zermelo–Fraenkel 集合论的框架，还是像 Coq 这样的类型论证明助手。它们与数学家的实际思维方式相距太远，使用起来极其笨拙。Voevodsky 的灵感是：**把同伦理论本身作为基础**。

12.4 同伦类型论与单价公理

同伦类型论（Homotopy Type Theory, HoTT）是一种新的数学基础，结合了：

- Martin-Löf 的依赖类型论（一种构造性的逻辑/类型系统）；
- 同伦理论（关于“空间”的形变理论）；
- Voevodsky 的关键洞察——“**单价公理**”（Univalence Axiom）。

单价公理大致说：*两个等价的类型（结构）是相等的*。这把“结构主义”的核心信念——同构对象应该被视为相同——直接编码进数学基础。

同伦类型论有几个革命性的特征：

(1) **构造性的**：所有证明都是程序，可以由计算机检验；

(2) **结构主义的**：等价即相等是基本原则；

(3) **几何化的**：类型本身被视为某种“空间”，相等性被视为“路径”；

(4) **统一了多个领域**：逻辑、范畴论、同伦论、计算机科学在一个框架中融合。

12.5　Voevodsky 的哲学含义

Voevodsky 的工作具有深刻的哲学含义：

第一，它复兴了构造主义：所有定理都必须有可计算的证明。布劳威尔的精神在百年后获得了新的形态。

第二，它把结构主义推到了极致：等价即相等不再是哲学口号，而是基础逻辑的公理。

第三，它把形式化重新提上日程：希尔伯特纲领的精神在 21 世纪以更现实的形式回归——不是希望证明所有数学的一致性，而是希望让所有数学论文都能被计算机检验。

第四，它打破了 *Grothendieck* 与 *Arnold* 的对立：HoTT 既是高度抽象的范畴—结构主义（继承 Grothendieck 传统），又是高度具体的算法—构造活动（呼应 Arnold 对"具体计算"的强调）。

Voevodsky 在 2017 年突然去世（年仅 51 岁），但他启动的项目已经成为 21 世纪数学基础最重要的方向。Lean、Coq、Agda 等定理证明助手正在被越来越多的数学家使用，2021 年 Peter Scholze 的"液态向量空间"工作甚至被完整形式化。

12.6　走向新的综合？

20 世纪的数学哲学呈现出一系列对立：柏拉图主义与形式主义、形式主义与直觉主义、布尔巴基与俄罗斯学派、Grothendieck 与 Arnold。这些对立并非全部消解，但 21 世纪的发展似乎指向某种新的综合：

- 同伦类型论是构造主义的，又是结构主义的；
- 形式化数学是严格的形式系统，又依赖人类直觉去发现哪些定理值得证明；
- 几何朗兰兹纲领统一了 Grothendieck 式的范畴抽象与物理学家的弦论直觉；
- 镜像对称连接了辛几何（物理直觉）与代数几何（结构抽象）。

也许 21 世纪的数学哲学不再需要在"发现 vs. 发明"、"几何 vs. 范畴"、"直觉 vs. 形式"之间二选一。也许这些对立只是同一个数学实在的不同侧面。

第 13 章　问题与理论：对“解题为王”叙事的反思

“What we are producing is human understanding.”
（我们所创造的是人类的理解。）
——William P. Thurston, *On Proof and Progress in Mathematics*

前面十二章我们梳理了九种主要的数学哲学路线。在结束全书的总比较之前，本章要讨论一个相对独立、但与所有这些路线都密切相关的话题：**当代数学叙事中对“解决猜想”的过度强调**。

这是一个元层面的问题。它关心的不是“什么是数学对象”“数学如何被认识”，而是*我们如何讲述数学、如何理解数学进步、如何评价一项数学工作的价值*。这一叙事方式深刻地塑造了数学共同体的文化、年轻数学家的选择、公众对数学的印象，乃至数学本身的发展方向。

13.1　数学的公共形象：一份“猜想清单”

如果一个外行问“当代数学家在做什么”，他得到的答案多半是这样的：

- Wiles 在 1995 年（与 Taylor 合作弥补 1993 年原始证明中的漏洞后）证明了费马大定理；
- Perelman 在 2002–2003 年的三篇 arXiv 预印本中给出了庞加莱猜想的证明；
- 黎曼猜想还没人解决；
- 千禧年大奖问题，每解决一个奖一百万美元；
- Mochizuki 声称证明了 abc 猜想，但还有争议…

数学的公共形象被压缩成了一份“未解之谜”的清单。媒体偏爱这种叙事——它有英雄、有奖金、有戏剧性、有清晰的“胜负”。学术界也在某种程度上配合：菲尔兹奖颁给“解决了重要问题”的人，Clay 研究所悬赏百万美元，重大数学新闻几乎只在某人“证明了什么”时才出现。

这种叙事不是凭空产生的。1900 年希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出 23 个问题，确立了“重大未解问题驱动数学进步”的范式。一个世纪后 Clay 研究所效仿希尔伯特，提出千禧年问题。在大众心中——甚至在许多年轻数学家心中——数学就是*一份很长的未解题目清单*，而做数学就是*从清单上勾掉条目*。

13.2　这一叙事为何严重误导

但稍加反思就会发现，这一叙事扭曲了数学研究的实际面貌。

第一，绝大多数实际的数学研究不是解决某个著名猜想，而是建立概念、发展理论、揭示联系。 Grothendieck 一生没有“解决”任何一个像庞加莱猜想那样举世闻名的猜想——他的工作是建立概形、上同调、拓扑斯的整套框架。但他被普遍认为是 20 世纪最伟大的数学家之一。如

果数学进步的衡量标准只是“解决猜想”，Grothendieck 几乎应该缺席这份清单——而这显然荒谬。

类似地，Riemann 之所以伟大，不是因为他解决了某个具体猜想（他甚至留下了一个至今未解的猜想），而是因为他重新定义了人们看待空间、函数、曲面的方式。Galois 的伟大也不在于“解决”五次方程问题——那只是表面成果——而在于他提出了*群*这个全新概念，由此开启了现代代数。

第二，那些“被解决”的著名猜想，其真正的工作恰恰是理论建立，不是最后的‘封顶’。 Wiles 证明费马大定理依赖于“模性定理”（Taniyama–Shimura 猜想），而这一对应关系的建立涉及几代人的理论积累——Eichler、Shimura、Langlands、Frey、Ribet、Taylor 等人贡献了一个庞大的理论网络。Wiles 是封顶之笔，但说“Wiles 解决了费马大定理”严重掩盖了背后真正的数学生命。

Perelman 解决庞加莱猜想用的是 Hamilton 的 Ricci 流——一个 Hamilton 用三十年构建的纲领。如果没有这一理论框架，再聪明的“解题者”也无从下手。可以毫不夸张地说：**大部分被广泛庆祝的“解决猜想”事件，真正的数学贡献分布在长达数十年的理论建构之中，而媒体只看到了最后的烟花。**

第三，这一叙事鼓励一种‘数学竞技’的扭曲文化。数学不是登山，不是比赛谁先冲顶。但当所有荣誉都集中在“第一个解决”上，年轻数学家被迫把研究方向选择视为“赌哪个猜想会先被攻破”，把时间花在已被定义为“重要”的问题上，而不是去发现新的、可能更深的问题。Grothendieck 那种“用二十年建立一个新框架”的工作模式在当代职业生涯压力下几乎不可能——你拿不到 tenure。

第四，这一叙事使数学的公共形象与教育目标严重偏离。学生进入数学专业时常以为数学就是“做难题”，发现真正的数学是“理解结构”后大失所望。中小学数学竞赛文化——本质上是“猜想清单”叙事的迷你版——筛选出的“数学天才”未必是未来的好数学家，反而常常是 *Grothendieck 所批评的那种“杂技演员”*。

13.3　批判的传统：Grothendieck、Arnold、Thurston

对“解题为王”叙事的批判有一条清晰的传统，恰好与本书前几章讨论的几位人物相连。

Grothendieck 在《收获与播种》中尖锐批评了数学共同体对技巧和”困难度”的崇拜，以及攻克者的英雄气概。在他看来，真正的数学不是关于”困难”的——困难只是说明我们的语言还不对。一个真正深刻的理解使原本困难的事变得显而易见。

这与第十章讨论的“涨潮”哲学一致：好的数学不是攻克问题，而是让问题溶解在更好的语言中。在 Grothendieck 看来，“解题英雄”叙事不仅是错的，而且是**道德上有害的**——它鼓励数学家追逐荣誉而非追求理解。

Arnold 的立场更微妙。他自己一辈子都在解决具体的硬问题——KAM 定理、奇点分类——所以不能说他反对解题。但他明确区分了*真问题与人为难题*：太阳系是否稳定（KAM）是真问题，因为它源于自然；某个抽象组合恒等式的最低限度证明可能只是技巧游戏。Arnold 反对的不是解题本身，而是**解题文化对‘什么算真问题’的扭曲**——以及由此带来的对几何—物理直觉传统的边缘化。

最系统的批判来自 William Thurston 在 1994 年发表的著名文章 *On Proof and Progress in*

Mathematics。Thurston 以 Fields 奖得主的身份提出了一个让数学界震动的问题：**数学的‘进步’到底是什么？**

> *“We are not trying to meet some abstract production quota of definitions, theorems and proofs. The measure of our success is whether what we do enables people to understand and think more clearly and effectively about mathematics.… What we are producing is human understanding.”*
>
> （我们不是在努力完成某个抽象的定义、定理和证明的生产指标。衡量我们成功与否的标准是，我们所做的事是否使人们能够更清晰、更有效地理解和思考数学。……我们所创造的是人类的理解。）

Thurston 的核心论点是：如果一个定理被证明了，但没有人真正理解为什么它成立，数学其实没有真正前进。反过来，如果某种理解扩散到整个共同体（即使没有形式化的“新定理”），数学真正前进了。

按这一标准，“解决了哪个猜想”几乎是数学进步的一个不可靠指标。数学进步的真正度量是**人类理解的扩展**——而这往往是无声的、缓慢的、难以用清单度量的。

13.4 Gowers 的“两种文化”

2000 年，菲尔兹奖得主 Timothy Gowers 写了一篇有影响的短文 *The Two Cultures of Mathematics*，把数学家分为两类：

- **解题者**（problem-solvers）：以解决具体困难问题为乐趣的人，典型代表是组合数学、解析数论、初等几何方向的工作者；
- **理论建构者**（theory-builders）：以建立大框架、统一不同领域为目标的人，典型代表是代数几何、范畴论、表示论方向的工作者。

Gowers 强调两种文化都有其价值，反对一种文化用自己的标准评判另一种。重要的是，他承认**菲尔兹奖确实更倾向于理论建构者**（Grothendieck, Deligne, Drinfeld, Kontsevich, Scholze）——这一观察某种程度上修正了我们前面的论点：学术内部的最高荣誉并不只看“解决猜想”，反而往往奖励理论建构。

但 Gowers 自己也承认：*公众媒体的关注和研究资助的话语*严重偏向“解决猜想”那一边。学术内部的复杂性被外部的简化叙事掩盖了。Gowers 的关键洞察是：**两类工作互相依赖**——没有解题者，理论会脱离地面；没有理论建构者，解题会沦为技巧堆砌。真正的问题不是“哪一类更重要”，而是*当前文化是否对两类都给予了正确的位置*。

13.5 案例：abc 猜想之争

近年来一个鲜明的案例是 Shinichi Mochizuki 的 abc 猜想“证明”。Mochizuki 在 2012 年发布了上千页的论文，声称用他独创的“宇宙际 Teichmüller 理论”（Inter-Universal Teichmüller Theory, IUT）证明了 abc 猜想。但这些论文几乎无人能读懂。十多年来，数学共同体陷入僵持：Mochizuki 与京都一派坚持证明正确，而 Peter Scholze 与 Jakob Stix 等人公开指出存在关键漏洞。

这一案例几乎是对“解题为王”叙事的一次现实主义实验：

如果“解决”意味着写出某个共同体一致接受的证明，那么 abc 猜想到底有没有“被解决”？ 如果共同体无法在数年内达成一致，所谓“解决”也就失去了意义。Mochizuki 的论文已被日本期刊正式发表，但西方主流数学界拒绝接受。这是“解决”还是“未解决”？

更深的问题是按 Thurston 的标准：*即使 Mochizuki 是对的，如果没人能真正理解他的证明，数学的整体理解前进了吗？* 答案显然是没有。abc 猜想在某份“清单”上的状态或许被改变了，但数学共同体的理解并没有相应增长。

abc 案例揭示了“猜想清单”叙事的根本脆弱：它把数学进步压缩为“是/否”的二元问题，而真实的数学进步是*理解的连续扩展*，二元清单根本无法表达。

13.6　重新框定：让猜想做“借口”而非“目标”

综上所述，“过度强调解决猜想”的数学叙事有以下几个问题：

- 它扭曲了数学研究的实际面貌；
- 它低估了理论建构的核心地位；
- 它鼓励竞技性、英雄主义的文化，损害共同体生态；
- 它使数学的公共形象与教育目标脱节；
- 它把数学进步简化为二元清单，遮蔽了真正的“理解扩展”。

但我们也不应走向另一个极端，认为“猜想完全不重要”。希尔伯特的 23 个问题确实塑造了 20 世纪的数学；韦伊猜想催生了 Grothendieck 的革命；Langlands 纲领虽然不是“一道题”，但也是大量“猜想式”陈述的网络。问题不在于猜想本身，而在于**猜想是被理解为目标，还是被理解为催化剂**。

Grothendieck 提出了或许是最优雅的态度：**让猜想成为‘借口’**——用它们作为进入更深结构的入口，而不是作为攀登的“山头”。在他建立概形理论的过程中，韦伊猜想就是这样一个入口：他并不只想“证明猜想”，他想理解*为什么*猜想会成立，理解之后猜想自动成立。这正是“涨潮”哲学在猜想问题上的具体表达。

如果要为数学进步给出一种更接近实际的衡量标准，它可能不是“清单上勾掉了多少条”，而是以下几个维度的综合：

(1) **概念清晰度的提升**：某个领域从混乱走向清晰；

(2) **学科之间的桥接**：原本分离的领域被发现是同一件事（如 Langlands 纲领）；

(3) **理解的扩散**：原本只有少数专家能掌握的内容变得可以被广泛理解；

(4) **新问题的提出**：好的研究产生比它解决的更多新问题；

(5) **方法论的革新**：新的工具、语言、视角的出现。

这些标准都不能像“解决了费马大定理”那样产生新闻头条，但它们更接近数学的实际生命。

13.7　对前面诸路线的回响

回望本书前十二章，我们会发现这一关于“解题为王”叙事的批判与许多路线都有深刻共鸣：

- **柏拉图主义**：如果数学真理是被发现的，那么数学家的工作是*聆听*而非*征服*——这与“解题英雄”叙事天然不合；
- **形式主义**：希尔伯特纲领虽以问题驱动，但其精神是建立*基础*，不是攻克*难题*；
- **直觉主义**：构造性数学强调的是*方法*而非*结论*，与“解决/未解决”的二元对立无法兼容；
- **结构主义**：研究的是模式与结构，“难题清单”几乎是无意义的；
- **俄罗斯学派**：Arnold/Novikov 强调真问题来自自然，反对人为难题被神圣化；
- **Grothendieck 路线**：本质上就是对“解题文化”的最系统反抗；
- **Atiyah 路线**：数学的价值在于统一与美，而非攻克清单上的堡垒；
- **准经验主义**：Lakatos 对“定义—定理—证明”格式的批评，本质上也是对“清单化”数学叙事的批评。

可以说，几乎所有严肃的数学哲学传统都对“解题为王”的简化叙事抱有保留。这种叙事更多是*媒体与制度*的产物，而非数学本身的真实声音。下一章我们将把视角从“数学是什么”转向“数学如何被写出来、传出去、被共同体共享”，看这些哲学路线如何各自塑造了数学的出版与传播形态。

第 14 章　数学的出版、传播与共同体：哲学如何塑造体例

> “A proof is what convinces me, and what I can pass on to others.”
> （证明是能说服我、并且我能传递给他人的东西。）
> ——根据数学共同体口传格言整理

前十三章我们关注的是*数学是什么*与*数学如何被认识*。但数学并不只是某个孤立心灵中的活动——它必须被**写下来、印出来、读出来、教出去、争论出去**，才真正成为“数学”。一份只放在抽屉里的证明，从社会学意义上讲并不存在；一项无人能复现、无人能理解的工作，无论作者如何自信，都不构成数学共同体的实质进步。

本章把视角转向这一往往被哲学讨论忽略的维度：**数学的出版、传播与共同体**。我们将看到，前十三章的每一条哲学路线，几乎都对应着一种独特的“写作—出版—传播”范式；而当代正在发生的几场变革——arXiv、Polymath、形式化证明库、AI 辅助写作——正在重新分配这些范式的相对权重。换言之，数学哲学的争论从未只是“关于”数学的，它一直在悄悄塑造*数学是如何被生产、被流通、被授权为真理的*。

14.1　出版作为哲学行为：从《原本》到 arXiv

我们容易把数学出版当作一项中性的“技术安排”：写出来、投出去、被审查、被印刷、被引用。但稍加历史距离就会发现，每一种主流出版形式背后都隐藏着一种关于*数学是什么*的哲学预设。

欧几里得《原本》确立的“定义—公理—命题—证明”四段式，是公理化数学观的物质化身。它默认数学知识可以被*脱离作者*地呈现——读者无需了解欧几里得本人，就能逐步重演每一步推理。这种“无作者”理想后来成为数学出版的隐性规范：好的数学论文应当像*自然现象*一样自我呈现，而不是像*个人叙述*一样依赖讲述者。

17–18 世纪的书信共和国（Republic of Letters）则代表另一极。Fermat、Pascal、Euler、Gauss 之间的往来书信中充满了“我发现了一个奇妙的事实，但页边太窄写不下”式的暗示、挑战、半完成证明。数学是*绅士之间的对话*，而非匿名的真理仓库。

19 世纪现代期刊（Crelle’s Journal, 1826；Liouville 的 Journal, 1836；Annals of Mathematics, 1884）的诞生，把数学从私人通信推向制度化的“公共记录”。期刊体例——摘要、引言、定理、证明、参考文献——逐步固化为今天我们熟悉的模板。这一模板深受 19 世纪德国“严格性运动”影响：Weierstrass 的 ϵ–δ 风格、Dedekind 的集合论语言，使数学论文有了可被任何受过训练的读者机械验证的外观。

20 世纪后期的预印本与 arXiv（1991–）标志着另一次转型：发表与权威认证开始分离。在传统期刊模式中，“被发表”几乎等同于“被共同体接受为真”；而 arXiv 上的一份未审稿预印本可能在数月内被全世界数百位专家研读、引用、纳入后续工作，远早于任何期刊的形式发表。从 Perelman 把庞加莱猜想的三篇核心论文*只*贴在 arXiv（拒绝投稿任何期刊）开始，数学共同体不得不正视一个事实：**真理的社会认定，已经先于其法律—制度认定。**

这些转型不是单纯的技术升级。它们对应着不同的哲学姿态：欧几里得式的“无作者真理”

vs. Fermat 式的“通信共同体”；期刊式的“制度化权威” vs. arXiv 式的“共同体即时阅读”。哪一种出版形式被认为“正常”，本身就是一种哲学表态。

14.2 形式主义与教科书：布尔巴基范式

如果说哪一种数学哲学最深刻地塑造了 20 世纪中后期的数学出版面貌，那一定是**形式主义—结构主义**，其代表是布尔巴基的《数学原本》（*Éléments de mathématique*，1939–）。

布尔巴基的写作有几条至今仍在塑造我们阅读体验的规范：

- **严格的“定义—命题—证明”线性体例**：所有概念在使用之前必须被定义，所有结果按逻辑依赖顺序排列；
- **术语和符号的统一**：“集合”“映射”“结构”“范畴”等术语在整套书内一致使用，避免一词多义；
- **从最一般情形出发**：先讲“一般拓扑”，再讲“度量空间”；先讲“一般环”，再讲“整数”。这与传统教学“由具体到一般”的次序完全相反；
- **隐去动机与历史**：正文中几乎不出现“这个定义是怎么想到的”“为什么要研究这个”的讨论，历史评论被压缩到章末小注。

这套规范的哲学根源是结构主义——既然数学研究的是*结构本身*，那么作者的发现过程、历史动机、几何直觉都属于“附会”，不应进入正文。读者要做的是按逻辑次序*消化*结构，不需要任何“为什么”。

这一范式的影响极其深远。20 世纪 60–80 年代的数学教科书几乎都被“布尔巴基化”，即使作者本人并不自觉是结构主义者。今天我们在数学期刊上看到的标准论文格式——摘要、定义、定理、引理、证明、推论——其本质就是布尔巴基范式的微型化。

但代价同样真实。Arnold 终生抨击的“形式主义瘟疫”，矛头之一就是布尔巴基式教科书。他认为这套体例**把读者训练成被动接收者**：背定义、跟证明，却永远不知道这些定义为什么是好的、这些定理为什么值得证明。第九章讨论的俄罗斯学派传统——Gelfand 的“薄册子”、Arnold 自己的《经典力学的数学方法》——是对布尔巴基范式的明确替代：保留例子、保留动机、保留物理直觉，宁可牺牲一些形式严格性。

可以说，**每一本数学教科书的体例选择，都是一次站队**：站在结构主义—形式主义一边，还是站在直觉—几何—物理传统一边。读者很少意识到这一点，但作者每一次决定“这个定义放在第几页”、“是否带着例子讲”时，他都在替读者做哲学选择。

14.3 Grothendieck 风格：巨著、涨潮与公共写作

布尔巴基范式的极端化身是 Grothendieck 的 EGA（*Éléments de Géométrie Algébrique*，1960–1967）与 SGA（*Séminaire de Géométrie Algébrique*，1960–1969）。这套合计上万页、长期未完成的著作，是“涨潮”哲学在出版形式上的直接表达。

EGA 的特征是：

- **极致的一般性**：每一个概念都被推到它能成立的最一般情境，再回头处理特例；
- **逻辑依赖的精确编号**："Théorème 4.2.6" 这样的引用可以穿越数千页保持稳定；
- **开放性与未完成性**：EGA 原计划十三章，最终只完成四章。但即使这四章已经重塑了代数几何；
- **共同体协作**：SGA 是研讨班记录，多位作者轮流报告，Grothendieck 统稿。这是 19 世纪个人作者制与 20 世纪现代协作之间的过渡形态。

EGA/SGA 的出版本身就是涨潮哲学的实践：与其 "攻克一个具体问题", 不如*把整个语言重写一遍*, 让原本困难的问题在新语言中变得显然。这意味着 Grothendieck 不能像传统数学家那样 "写论文"——他不得不*写书*，而且是**巨著**。一份合理的概形理论，无法在一篇 30 页的论文里讲清楚。

这与俄罗斯学派形成鲜明对照。Arnold 一生写过大量小书、小论文，几乎没有 "巨著"。原因不是 Arnold 写不出大书，而是**他不相信数学需要巨著**：一个好的想法应该能在 20 页内讲清楚；如果讲不清楚，多半是因为还没想清楚。Gelfand 的《广义函数》系列虽然多卷，但每一卷都自包含、可单独阅读，与 EGA 那种 "必须按顺序读 1500 页" 的结构完全不同。

这是两种关于 "数学如何流通" 的根本不同信念：Grothendieck 相信深刻的数学需要*从头重建语言*，因此必然产生巨著；Arnold 相信深刻的数学应当*可被快速口头传达*，因此首选短篇与课堂。今天阅读 EGA 与阅读 Arnold 的小册子是完全不同的智力经验，而这一差异的根子直接通向第八章、第九章、第十章讨论的哲学分歧。

值得补充的是，Grothendieck 后期写下的 *Récoltes et Semailles*（《收获与播种》，约 1000 页未正式出版）是数学家个人写作的另一极端：它**彻底打破匿名性**，以第一人称大量倾诉个人感受、共同体伦理、对学生的失望。这本书长期只能以打印稿或灰色出版形式流传，恰恰说明主流数学出版机制对 "过于个人" 的写作有多么不适应。

14.4　准经验主义与新型传播：arXiv、博客、Polymath

如果说布尔巴基代表 "出版即权威" 的旧范式，那么 21 世纪初以来的几场实验则呈现了一种**准经验主义**的新数学传播。这些实验的共同点是：把数学的*形成过程*本身公开化，让证明在共同体的实时反馈中演化。

arXiv 与预印本文化（1991–）的影响已如上述。它的哲学含义是：数学共同体不再需要等待期刊的 "授权", 而可以即时阅读、即时回应、即时引用任何研究者的工作。这削弱了期刊作为 "真理认证机构" 的地位——期刊从*授权者*降级为*档案保存者*。这一变化与 Lakatos 的准经验主义高度契合：数学知识不是被 "一次性确定", 而是在共同体的持续检视中逐步稳定。

数学博客（Terence Tao 的 *What's New*、Gowers's Weblog、n-Category Café 等）则进一步推进了这一趋势。Tao 在博客上常常*半成品式地*讨论正在思考的问题、不完整的证明思路、对他人工作的解读。这些内容如果送入传统期刊，多半会被作为 "不够成熟" 拒稿；但在博客上，它们恰恰是数学共同体最有价值的实时信号。

Polymath 项目（2009–）由 Gowers 发起，是一次更激进的实验：把一个开放数学问题放上博客，邀请全世界数学家公开协作解决。第一个 Polymath 问题（Hales–Jewett 定理的组合

证明）在数周内被一群公开协作的数学家解决，参与者从知名教授到匿名研究生。这是数学史上前所未有的传播形态：**证明不再有“作者”，只有“参与者”**。

这些实验都暗中预设了一种 Lakatos 式的数学观：

- 证明是*可错的*、可被反驳的、可被反复修订的；
- 数学知识的真理性来自共同体的持续检视，而非作者的个人权威；
- 错误公开比错误私藏更有价值，因为它使共同体能更快收敛到正确理解。

这与布尔巴基“一锤定音”式的出版理想是**根本对立**的。在布尔巴基模式下，论文/书籍发表前必须接近完美；在 Polymath 模式下，错误是协作过程的必要燃料。

14.5　abc 猜想案例：当传播失败时

第十三章已经讨论过 Mochizuki 的 abc 猜想“证明”之争。从数学哲学的角度看，这是一个例证；但从**出版与传播**的角度看，它是一个更深的警示。

Mochizuki 把上千页论文上传到自己的个人网页，2012 年发布，2020 年被日本《PRIMS》期刊接受、2021 年正式发表（Mochizuki 本人是该期刊主编，这一程序在西方共同体引发了严重的利益冲突质疑）。但 Scholze 与 Stix 在 2018 年访问京都与 Mochizuki 当面讨论后，公开声明证明的关键步骤（“推论 3.12”）存在无法弥合的漏洞。Mochizuki 拒绝以共同体可检验的方式回应。

这场争议的核心*不是*数学技术层面的——它是关于**传播失败本身的哲学性质**：

- 如果一份证明只能被作者本人和少数几个紧密弟子理解，它是“证明”吗？
- 如果作者控制了发表期刊，“正式发表”还构成共同体认证吗？
- 如果共同体在十年内无法收敛到一致判断，数学真理的“社会认定”是否破产？

按 Thurston“数学产出的是人类理解”的标准，abc 案例显然是失败：无论 Mochizuki 是否正确，*共同体的理解并没有因此前进*。按 Lakatos 准经验主义的标准，这也是失败：证明并未进入“公开检视—反驳—修订”的循环，反而退回到了某种*私人启示*的状态。

abc 案例揭示的根本问题是：**数学的真理性不能脱离传播**。一份“在原理上正确但实际上无人能读”的证明，处在数学之外的某个尴尬位置——它既不是被证伪的，也不是被接受的，而是*未被吸收的*。这种状态没有任何前述哲学路线能为其辩护，包括最个人主义的直觉主义：Brouwer 虽然相信数学是个人心灵的活动，但他从未否认数学需要被传达和检验。

14.6　形式化证明库：作为新型出版媒介的 Lean 与 mathlib

近年最有意思的新趋势是**交互式定理证明器**（Coq、Isabelle、Lean）及其大型形式化证明库（如 Lean 的 mathlib）的兴起。这一趋势在数学出版史上是革命性的。

传统数学论文的“证明”是用自然语言写就的，依赖读者*补全*大量推理细节。一篇 30 页的论文，完整展开为机械可验证的步骤可能需要数万行。formal proof 的兴起改变了这一点：定理

被陈述为某种类型论中的命题，证明是构造该命题对应的项；编译器逐步验证。任何被 mathlib 接受的证明，至少在内部逻辑上**不可能错**（除非编译器本身有 bug）。

这对数学传播的影响有几层：

- **真理认证从社会过程部分回归到机器过程**：传统数学的“这个定理是对的”依赖共同体阅读、复现、形成共识；形式化数学的“这个定理是对的”部分由编译器保证；
- **出版单位从“论文”变为“commit”**：mathlib 是 GitHub 上一个活的代码库，每天有几十次更新。“发表一个定理”意味着 merge 一个 pull request；
- **协作的细粒度大幅提升**：不需要等到一篇完整论文，任何一个引理都可以被独立贡献。Polymath 的精神在 mathlib 中获得了更稳定的制度形式；
- **Voevodsky 哲学的物质化**：第十二章讨论的同伦类型论与单价基础，本来只是哲学方案；Lean 与 mathlib 让其在工程上变得现实。

这条路线对前述哲学的回响极为复杂。它显然偏向**形式主义**（数学最终是符号操作）与**构造主义**（证明即构造）；同时它又是 Polymath 式**准经验主义协作**的延伸；它也部分实现了 Bourbaki“把数学组织为统一结构”的理想，但比纸质 Bourbaki 更彻底——因为现在“依赖关系”是机器维护的。

但它与某些路线发生紧张。Grothendieck 涨潮哲学强调“正确的语言使困难溶解”——但 mathlib 中的形式化往往要求把高度概念性的证明展开为机械可验证的步骤，过程极其繁琐。Arnold/俄罗斯学派强调几何直觉与简短论证——形式化证明库恰恰是“反 Arnold”的极端形态：它把每一步直觉显式化、机械化、可重放。

未来数学出版会向哪一边倾斜？目前看来不是“取代”，而是**分化**：高难度、安全性敏感的核心定理（如四色定理、Feit–Thompson 定理、Liquid Tensor Experiment）逐步被形式化保证；而日常研究、概念性数学、跨学科的猜想式工作仍以传统论文形式流通。这本身就是“两种文化”在新介质上的再现。

14.7　AI 时代的写作、审稿与作者身份

第十六章将系统讨论 AI 进入数学的方方面面。但具体到*出版与传播*的层面，几个变化值得在这里独立标出。

论文写作。LLM 已经被广泛用于论文初稿撰写、英语润色、文献综述生成。在数学领域，这条线尚不如其他学科那么激烈——数学论文对精度要求极高，LLM 仍频繁产生看似合理但实际错误的陈述。但*摘要、引言、相关工作*部分被 AI 辅助的比例正在快速上升。

同行评审。这是一个更微妙的问题。如果审稿人用 LLM 来阅读和评判论文，会发生什么？目前主流期刊普遍禁止把待审稿件输入第三方 AI（出于保密考虑），但实际执行难以监控。审稿——这一支撑现代数学出版权威的核心机制——正在变得不稳定。

作者身份的稀释。如果一个证明的关键引理是某 AI 系统辅助发现的，作者署名应当如何处理？如果一个 mathlib 中的形式化是由 GitHub Copilot 大幅辅助完成的，“贡献者”字段还有传统意义吗？这些问题目前没有共识，但它们正在快速侵蚀 19 世纪期刊体制下“单一作者—独立创造”的隐含假设。

论文贬值与新评价标准的需求。如果中等难度的数学论文未来可以由 AI 大量产出，那么“发表数量”作为学术评价标准就完全破产。这反过来呼应了第十三章的批判：如果“解题为王”叙事在 AI 时代加速崩塌，那么数学的*进步度量*必须从“发表/解决了什么”转向 Thurston 所说的“人类理解扩展了多少”——这种转向需要新的出版、传播、评价制度来支撑。

14.8　对前述路线的回响：每一种哲学都有其传播形态

回顾本章的讨论，可以提取出一个简洁的对应关系：

- **柏拉图主义** → 数学家是“聆听者”，写作的目标是忠实传达所见。文体偏好简洁、确定、无需辩解；
- **逻辑主义/形式主义** → 出版即逻辑链条的固化。*Principia Mathematica*、Bourbaki *Éléments*、Lean mathlib 是这一路线在三个时代的连续表达；
- **直觉主义/构造主义** → 强调“可构造”的传播：现代形式化证明库本质上延续了 Brouwer–Bishop 的精神；
- **结构主义** → 教科书体例（先一般、后特例；先结构、后例子）的哲学根源；
- **俄罗斯学派** → “薄册子”与课堂传统，反对巨著、反对脱离例子的形式化；
- **Grothendieck 路线** → 巨著、长程协作、统一术语——EGA/SGA 是涨潮哲学的物质化；
- **Atiyah 路线** → 演讲、讲义、跨界综述。Atiyah 一生的写作大量是*解释性*的，把数学讲给其他学科听，这本身就是“桥梁”哲学的传播实践；
- **准经验主义** → arXiv、博客、Polymath、形式化协作——所有“过程公开”的实验都是 Lakatos 哲学的当代延伸；
- **同伦类型论** → 形式化证明库作为新型出版媒介。

这一对应关系揭示了一件容易被忽视的事：**数学哲学从来不只是关于数学本身的争论，它一直在悄悄塑造数学知识的物质形态**——纸张如何排版、定义放在哪里、谁有权审稿、什么算“发表”。当我们说“偏好布尔巴基”或“偏好 Arnold”时，我们不只是在表达哲学立场，我们同时在选择*一种数学共同体的组织形式*。

反过来说，今天数学出版的几场结构性变革（arXiv 的兴起、形式化的扩张、AI 的渗入、Polymath 式协作）也不只是技术现象，它们在重新打开此前被 Bourbaki 范式封闭的一些哲学选项——直觉主义、准经验主义、Arnold 式的轻装写作，都在新介质中重新获得了表达空间。在这个意义上，*数学出版的当代变革本身就是一场分布式的数学哲学辩论*，只不过参与者大多并不自知。

14.9　启示：作为读者与作者的责任

本章的讨论最后落到一个实践性的问题：作为今天的数学读者与作者，我们能从这些哲学反思中带走什么?

对读者而言：意识到自己手中的论文/教科书不是“中性”的真理传递工具，而是某种特定哲学范式的产物。读 Bourbaki 时知道自己在被训练成结构主义者，读 Arnold 时知道自己在接收一种反 Bourbaki 的传统。理解这一层，就能避免被任何单一范式所规训。

对作者而言：每一次写作决定都是一次哲学表态。把例子放在定义之前还是之后、是否给出动机、是否解释失败的尝试、是否承认借用了 AI 辅助——这些选择共同决定了你在*塑造*怎样的数学共同体。Grothendieck 在《收获与播种》中反复强调的一个观点是：**数学家对其工作的传播方式负有道德责任**，因为这些方式决定了下一代如何被引导。

对共同体而言：当代正在发生的几场出版变革（arXiv、Polymath、形式化、AI）不应被仅仅视为技术升级，而应被视为*有意识的哲学选择机会*。数学共同体可以选择放任市场逻辑（影响因子、h 指数、发表数量）继续主导；也可以主动重新设计评价、协作、传播机制，让其与本书所讨论的更深刻的数学价值——理解、统一、美、共同体伦理——对齐。

这是一个开放的未来。但有一点是清晰的：**数学哲学不应只是哲学家的学术游戏**。它直接关乎数学共同体的健康——而共同体的健康，最终取决于我们如何写作、如何阅读、如何彼此倾听。

第 15 章　比较与综合：九条路线的全景图

“数学的本质在于它的自由。”

——Georg Cantor

15.1　回顾：九条路线

经过前面诸章的讨论，我们已经看到了九条主要的数学哲学路线，并在第十三章对当代“解题为王”叙事做了一次集中反思、在第十四章考察了这些哲学路线如何塑造数学的出版与传播形态。现在是时候把所有这些线索放在一起通观对比了。

1. **柏拉图主义**：数学对象客观存在于理念世界，数学家的工作是发现而非发明。
2. **逻辑主义**：数学可以还原为逻辑，数学真理就是逻辑真理。
3. **形式主义**：数学是形式符号的操作，意义由内部一致性保证。
4. **直觉主义/构造主义**：数学是心灵的构造活动，存在意味着可构造。
5. **结构主义**：数学研究结构而非对象，对象由其在结构中的位置定义。
6. **俄罗斯学派**：数学是自然科学的一支，根植于物理与几何直观。
7. **Grothendieck 路线**：数学是寻找正确语言的活动，抽象越高越接近真理。
8. **Atiyah 路线**：数学与物理是平等伙伴，美与统一是发现的指南针。
9. **准经验主义/同伦类型论**：数学是猜想—验证的拟经验过程，可形式化为构造性算法。

15.2　主要维度的对比

下面用一张大表，把这九条路线在五个核心维度上做对比。

路线	本体论	认识论	真理观	方法	代表
柏拉图主义	客观存在的理念	直觉/理性洞察	与理念符合	发现	Gödel, Hardy
逻辑主义	逻辑构造物	逻辑分析	逻辑必然性	还原	Frege, Russell
形式主义	无（仅符号）	形式推导	一致性	公理化	Hilbert
直觉主义	心灵构造	内在构造	可证明性	构造	Brouwer, Bishop
结构主义	结构（关系网）	结构同构	结构性质	抽象	Bourbaki, Mac Lane
俄罗斯学派	与物理同构	几何直观	揭示自然	例子 $\rightarrow$ 定理	Arnold, Novikov
Grothendieck	超验结构	寻找正确语言	内在统一	涨潮	Grothendieck
Atiyah	物理—数学对应	直觉与美学	跨域统一	桥梁/对话	Atiyah
HoTT/构造	类型/空间	程序证明	可形式化	单价	Voevodsky

15.3　三条主线索

仔细观察这九条路线，我们可以提取出三条贯穿的主线索：

15.3.1　线索一：发现 vs. 发明

*数学是被发现的，还是被发明的？*这是数学哲学最古老的问题。柏拉图主义、Grothendieck、Arnold/Novikov、Atiyah 倾向于“发现”；形式主义、（部分的）逻辑主义倾向于“发明”；直觉主义居中——数学是心灵的构造，但这种构造遵循心灵的内在规律，所以也带有某种“发现”色彩。

值得注意的是：**大多数顶级数学家在被追问时都倾向于“发现”**，无论他们公开持何种哲学立场。这或许是因为，真正深入的数学工作经验中，那种“理论自己向你展开”的感觉过于强烈，难以解释为纯粹的“发明”。

15.3.2　线索二：形式 vs. 直觉

*数学的本质是形式系统还是直观把握？*这是 20 世纪基础危机的核心问题。形式主义、逻辑主义、HoTT 强调形式；直觉主义、俄罗斯学派、Grothendieck、Atiyah 强调直觉。

值得注意的是：**这一对立不像表面那么尖锐**。形式系统的设计本身需要直觉指导（哪些公理“自然”？哪些证明策略“优美”？）；直觉的传播又需要形式表达（否则无法交流和验证）。21 世纪的同伦类型论恰恰展示了：高度的形式化*可以*与高度的几何直观共存。

15.3.3 线索三：自足 vs. 应用

数学是自我封闭的体系，还是与外部世界（物理、计算机科学、其他科学）紧密相连？布尔巴基、Grothendieck 倾向于自足；俄罗斯学派、Atiyah、准经验主义倾向于与外部相连。

值得注意的是：**这一对立在 21 世纪正在弱化**。一方面，最抽象的数学（如几何朗兰兹）正在与物理学（弦论、规范理论）深度交融；另一方面，最具体的应用（如机器学习）正在催生全新的纯数学问题。"应用 vs. 纯粹"的二分法越来越显得过时。

15.4 相同的对立，不同的层面

更深的观察是：**许多看似不同的对立其实是同一个对立在不同层面的反复出现**。

例如，"直觉 vs. 形式"在 19 世纪是康德 vs. 弗雷格；20 世纪是布劳威尔 vs. 希尔伯特；20 世纪后期是 Arnold vs. Bourbaki。与此同时，"具体 vs. 抽象"又以 Arnold vs. Grothendieck 的形式再现——这不是关于形式主义的争论，而是关于哪一种直觉应当引导数学的争论。每一代人都在重新发现并重新阐述这些张力。

这或许暗示：**数学本身就有不可消解的张力**——它既需要直觉的发现性，又需要形式的可靠性；既需要具体的丰富性，又需要抽象的统一性；既需要与自然的连接，又需要内部的纯粹性。任何一种数学哲学如果只强调一极而完全否认另一极，就会陷入片面。

15.5 当代数学家的实际哲学

如果我们走访当代顶级数学家（Tao, Scholze, Kontsevich 等），询问他们的数学哲学立场，会发现一个有趣的现象：**大多数人不承诺任何单一立场，而是根据工作场景灵活切换**。

- 在做研究、寻找新结果时，他们是*柏拉图主义者*——感觉真理在那里等待被发现；
- 在写论文、做严格证明时，他们是*形式主义者*——只要符号操作正确即可；
- 在教学时，他们是*俄罗斯式的*——从例子和直观开始；
- 在设计大理论时，他们是 *Grothendieck 式的*——寻找正确的概念框架；
- 在使用 Lean 形式化时，他们是*构造主义者*——只接受可机器验证的证明。

这种"**多重立场的灵活并存**"，可能不是哲学上的不严肃，而是对数学复杂性的恰当回应。数学作为一种活动太丰富，单一哲学无法完全涵盖。

15.6 走向未来：一种综合的可能

如果要为 21 世纪的数学哲学描绘一个可能的综合图景，它可能是这样的：

本体论上，温和的结构柏拉图主义：结构是真实的，但具体对象只是结构在某个层面的实例。

认识论上，直觉与形式的协作：直觉指引方向，形式化保证可靠性，两者互相滋养。

方法论上，多种风格的并存：俄罗斯式的几何直观、Grothendieck 式的概念抽象、Lean 式的机器形式化，分别适用于不同问题。

价值论上，回到 Grothendieck 与俄罗斯学派的共识：*数学是诚实的活动*，反对功利化、商业化、纯粹技巧化的扭曲。

应用论上，承认数学与物理、计算机科学、生物学的深度纠缠，放弃"纯粹 vs. 应用"的虚假二分。

这并非任何已存在哲学的简单总和，而是一种新的姿态——一种对数学复杂性的成熟接纳。

第 16 章　人工智能时代的数学：教育与研究的重塑

> “机器能否做数学？这个问题，迫使我们重新审视：人究竟在数学中做什么？”
>
> ——改编自 Alan Turing 之问

在前十五章中，我们梳理了从毕达哥拉斯到 Voevodsky 的数学哲学传统。但 21 世纪第二个十年以来，一个新的力量正在以前所未有的速度改变数学的图景：**人工智能**。从形式化证明助手（Lean、Coq、Isabelle）的成熟，到大语言模型（GPT、Claude、Gemini 等）展示出令人惊讶的数学推理能力，再到 AlphaProof、AlphaGeometry 等专门系统在 IMO 级别问题上的突破——AI 正在同时冲击数学研究与数学教育的根基。

本章独立于前面的“九条路线”，讨论这一正在发生的变革，及其对数学哲学诸基本问题的回响。

16.1　AI 进入数学的三条路径

当前 AI 与数学的交汇主要沿三条路径展开。

第一，形式化证明的规模化。 Lean 等证明助手原本是 Voevodsky 单价基础纲领的工具，但近年与 AI 结合后发生了质变。研究级证明的完整形式化——从 Scholze 的凝聚态数学到 Tao 的调和分析——已从理论上的可能变为实际操作；mathlib 库以社区协作方式持续扩张，已包含数十万条机器可验证的定理。AI 在这里扮演的角色是*加速器*——把过去需要数百小时人工形式化的工作压缩到数十小时甚至更少。

第二，专门 AI 系统解决数学问题。 DeepMind 的 AlphaGeometry（2024）用神经网络与符号引擎结合，在 IMO 几何题上达到金牌水平；AlphaProof 与 AlphaGeometry 2 联合系统在 2024 IMO 上解出 6 题中的 4 题，达到银牌水平。这些系统不只是“搜索证明”，而是展现出某种类似*几何直觉*的策略选择能力。

第三，通用大模型作为数学协作者。 GPT-4、Claude、Gemini 等通用模型并非为数学优化，却在与数学家的对话中扮演越来越重要的角色：检索文献、生成猜想、检查论证、起草证明、解释陌生概念。Tao 在公开博客中多次记录他与 LLM 协作的过程，认为这相当于“拥有一个不知疲倦、博学但偶尔出错的研究生”。

这三条路径并不孤立——它们正在汇合。一个典型场景是：数学家用 LLM 起草思路，用证明助手验证关键步骤，最终把结果以人类可读形式发表。这种工作流至 2026 年已不再是科幻。

16.2　历史类比：工具革命的先例

AI 并不是第一种深刻改变数学面貌的工具。回顾历史，至少有四次 “计算工具革命” 为今天的局面提供了参照。

第一次：符号代数的发明（16–17 世纪）。韦达与笛卡尔引入字母符号表示未知数和运算，把几何问题翻译为代数方程。这一看似"仅仅是记号"的改变，实质上扩展了数学家*能够思考的问题空间*。在此之前，每个问题都需要以自然语言逐步论证；在此之后，符号操作本身成为推理手段。当时的反对声音与今天惊人地相似：有人担忧符号操作会让数学家"丧失对意义的直觉把握"。

第二次：微积分的发明与严格化（17–19 世纪）。Leibniz 的微积分记号和 Euler 对级数、积分的大胆操作，使得大量此前无法处理的物理问题变得可解。但 Euler 时代的分析计算高度依赖个人技巧；19 世纪 Cauchy、Weierstrass 的严格化运动，本质上是在追问：*当工具变得足够强大时，如何保证结果的可靠性？*这一追问与今天"AI 辅助证明是否可信"的疑虑一脉相承。

第三次：电子计算机的引入（20 世纪中叶）。1976 年 Appel 与 Haken 用计算机辅助证明四色定理时，数学界爆发了一场认识论危机：一个"证明"如果没有人能用纸笔完整验证，还算不算证明？四十年后的今天，计算机辅助证明已广泛接受，但当年的争议预演了 AI 时代更剧烈的版本。

第四次：计算机代数系统（1980 年代至今）。Mathematica、Maple、MATLAB 等系统使积分、微分方程求解、矩阵运算从手工技艺变为一键操作。大学数学教育曾因此经历一次调整：重心从"演算训练"部分转向"概念理解"与"建模能力"。今天 AI 引发的教育冲击，在结构上是这一趋势的激进加速。

从这四次先例中可以提炼出一个共同模式：**每一次工具革命都引发恐慌（"数学家会被取代吗？"），但最终结果都是重新定义数学家的角色而非消灭它**。符号代数没有消灭几何直觉，微积分的严格化没有压制创造性计算，计算机没有取代证明，CAS 也没有让数学系关门。但每一次，*哪些工作属于数学家、哪些属于工具*的边界都发生了不可逆的位移。

AI 与前四次的根本区别在于：前四次工具扩展的是*计算*能力，而 AI 似乎正在侵入*判断与创造*的领域。这一质变是否意味着"这次不同"？还是说，历史模式依然成立，只是边界会再次大幅移动？这是本章后续各节试图回答的核心问题。

16.3　案例研究：AI 与数学的实际交汇

抽象讨论之外，几个具体案例可以帮助我们理解 AI 正在怎样改变数学实践。

案例一：DeepMind 的两项数学发现。2021 年，DeepMind 与多位数学家合作，在 *Nature* 上发表了两项用机器学习引导人类直觉的数学发现：其一，与 Marc Lackenby、András Juhász 合作，在*纽结理论*中揭示了纽结的代数不变量（符号差、signature）与几何不变量（与双曲体积相关的量）之间一种此前未被察觉的联系；其二，与 Geordie Williamson 合作，在*表示论*中针对 Kazhdan–Lusztig 多项式的"组合不变性猜想"，由神经网络识别出关键模式并由 Williamson 进一步形成数学猜想。值得注意的是：AI 在此始终充当*猜想生成器*，而非证明机器。它"看见"了人类在海量数据中难以察觉的统计模式，但*理解*为什么这个模式成立、并把它转化为严格证明，仍然是人的工作。

案例二：Tao 与 LLM 的协作实验。陶哲轩自 2023 年起在博客中公开记录他与大语言模型的协作过程。在一次典型场景中，他要求 LLM 检查一段关于 Goldbach 猜想的论证的逻辑间隙，模型准确识别出了论证中的一处循环推理。在另一场景中，模型生成了一个关于调和分析的"猜想"，看似合理但经检验为假——Tao 将此类比为"与一个聪明但不可靠的合作者对话"。

这种人机协作模式的关键在于：*数学家必须保持独立判断力*，AI 的价值在于扩展思维空间而非替代思考。

案例三：Scholze 的液态向量空间形式化。2021 年，Peter Scholze 在 Lean 社区发起挑战，请求将他的 "液态向量空间" 理论中一个关键引理形式化验证。社区在六个月内完成了这一任务。Scholze 事后表示，这一经历改变了他对形式化的看法——不是因为他怀疑自己的证明有误（事实上形式化确认了原始证明的正确性），而是因为形式化过程暴露了*人类证明中隐含假设的密度*：每一页 "显然" 的论证背后，都有数十个需要机器逐一确认的步骤。这一经验凸显了 AI 形式化的认识论价值：它不仅验证结论，还使*推理的粒度*变得可见。

这三个案例勾勒出 AI 在当前数学中的三种角色：**猜想发现者、对话伙伴、形式验证者**。它们的共同特征是：AI 始终作为*工具*嵌入人类主导的研究流程，尚未独立完成从提出问题到证明定理的完整链条。这一现状是否会持续，还是仅仅是过渡阶段，是我们在后续讨论中需要持续追问的。

16.4　对数学研究的冲击

AI 给数学研究带来的冲击是多层次的。

首先是速度。文献综述、计算实验、特殊情形验证——这些原本占用研究者大量时间的工作，正在被 AI 大幅压缩。Tao 估计 LLM 已使他个人的研究效率提高数倍。这一变化的累积效应可能在十年内重塑整个学科的产出节奏。

其次是可验证性。这是 Voevodsky 担忧的延续：当代数学论文越来越长、越来越复杂，传统同行评议日益不堪重负。AI 辅助的形式化让"证明的可靠性"从依赖少数专家的目光，转向可以由任何人在合理时间内机械验证。这是数学认识论的一次结构性升级。

第三是猜想生成。如上节案例一所述，AI 已经能够在纽结理论等领域中发现此前未知的数学关系；类似的工作正在表示论、组合学中展开。AI 不只是"证明工具"，也开始扮演*发现者*的角色——尽管目前仍高度依赖人类提示。

第四是研究品味的可能贬值。这是一个微妙而严肃的问题。如果 AI 能在中等难度问题上达到博士生水平，传统数学训练中"做大量练习题"的环节——长期被视为培养*数学品味*的核心——其地位将不可避免地改变。数学家的核心价值将更多地转向*提出正确问题、识别什么值得研究、看见隐藏的联系*——而这些恰恰是 Grothendieck、Arnold、Thurston 一再强调的"真正的数学"。

讽刺的是：**AI 时代反而可能验证 Grothendieck 和 Thurston 的哲学**——当机器能轻松完成"技巧表演"时，剩下的真正属于人的工作，正是"理解"与"眼光"。

16.5　哪些数学研究最先被贬值

承接上节关于 "研究品味贬值" 的讨论，值得更具体地追问：在 AI 浪潮中，*哪一类数学工作最先、最快地失去其稀缺性*？这并不是预言哪些领域 "会消失"——数学很少有领域真正消失——而是要识别哪类**研究行为**的市场价值会被压缩得最厉害。粗略地，按贬值速度从快到慢排列：

1. 高度程式化的 "技巧型" 证明。国际奥数风格的难题、初等组合或不等式技巧题、本

科竞赛题——这些问题有清晰的“正确答案”、有限的技巧库、可以被海量训练样本所覆盖。AlphaGeometry/AlphaProof 在 IMO 几何与代数题上的银牌级表现已经预示：*在这一区段，人类的边际贡献正在迅速归零*。这正是第十三章所批判的“解题为王”叙事在 AI 时代加速崩塌的部分。

2. 例行的计算与符号操作型研究。大规模符号计算、积分变换、特殊函数恒等式、有限群的具体结构分类、给定方程的数值求解——凡是“有明确目标 + 可机械化路径”的工作，AI 与符号计算系统（Mathematica、SageMath、Lean 战术）结合后将以极高效率完成。这一类工作仍有学术价值，但其作为**独立可发表论文**的地位会显著降低——更接近“跑实验”而非“出思想”。

3. 中等难度的“例题级”定理与练习题型论文。数学研究的中段存在大量“取一个已知技巧，应用于一个稍新的对象”类型的论文。这是博士培养体系中产出最大的层级，但也是 AI 最容易迫近的层级。一旦 LLM 能稳定完成“给定方法 + 给定问题 → 完整证明”的端到端任务，这一段的稀缺性将塌缩。

4. 大量“验证性”与“参数空间扫描型”工作。把已有定理推广到“加一个维度”、“换一种范畴”、“弱化一个假设”——这类增量式扩展长期占据期刊版面，但其本质是有限组合空间内的搜索，对 AI 来说尤为友好。

相对地，以下类型的研究在可预见的未来仍将保持高稀缺性：

- **概念发明**：定义一个“正确”的新对象（如 Grothendieck 的概形、Voevodsky 的单价基础）。这类工作需要*看见尚不存在的语言*，而 AI 目前仍依赖既有语言的统计模式。
- **跨领域类比的发现**：把表面无关的两个领域识别为同一结构的不同投影（如 Langlands 纲领、镜像对称）。这种“远距离类比”恰是当前 LLM 最薄弱的环节。
- **品味判断**：在一片可能的研究方向中识别“哪一个值得做”。这是 Arnold 反复强调的“数学审美”，至今没有形式化指标。
- **基础重塑**：对一个领域的整套语言、方法、动机进行重新组织（Bourbaki、Grothendieck、HoTT）。这类工作不只是“证明定理”，而是*改变什么算是定理*。

换言之，AI 贬值得最快的是**有限搜索空间内的高强度技巧型工作**；保值最久的是**创造新搜索空间本身的工作**。这一格局与本书所讨论的两条主线索惊人地吻合：第十三章批判“解题为王”时所提倡的，恰好就是 AI 时代最不可替代的那部分；而 Arnold/Grothendieck 对“眼光”与“结构”的双重强调，在 AI 浪潮中获得了一种意外的当代支持。

应当谨慎的是：“贬值”不等于“无用”。技巧型训练对数学家的认知形成仍然不可或缺——正如计算器普及后，心算训练仍是数学教育的基础。问题不在于这些工作要不要做，而在于它们能否继续作为*学术晋升与声誉分配的主要依据*。如果不能，整个数学共同体的激励结构都将面临重组——这才是 AI 对数学研究最深远的冲击。

16.6 对数学教育的冲击

如果说研究端的冲击是渐进的，那么教育端的冲击是*即时而剧烈*的。

家庭作业的危机。任何一道标准的本科或研究生练习题，当前的 LLM 都能给出像样答案。这使得传统“做题—批改—评分”的教学闭环近乎瓦解。教师面临两难：禁用 AI 是徒劳的，全面接纳 AI 又使评估标准失效。

“计算技能”的贬值。求导、积分、解线性方程组、求矩阵特征值——这些曾占据微积分与线性代数课程大部分时间的内容，今天任何 AI 都能瞬间完成。这并不意味着学生不需要学，但教学重心必须前移：从*执行计算*转向*理解概念、构造模型、判断结果是否合理*。

“理解”的再定义。当 AI 可以为学生提供随时随地的“个性化辅导”，学生与数学的关系也在改变。优势是显然的：长期被忽视的学生可以获得耐心解释；劣势则是更深层的：如果每一步困惑都立刻被 AI 解决，学生可能丧失*在困惑中独立挣扎*所带来的认知锻造。数学教育最有价值的部分，往往不是知识本身，而是*思维肌肉*在难题前的反复训练——这一点 AI 还难以替代，甚至可能在表面上替代实则削弱。

竞赛文化的动摇。第十三章批判了“解题为王”的叙事；AI 现在以一种 Grothendieck 也未曾预料的方式加速了这一叙事的瓦解——如果 AlphaProof 能在 IMO 上得银牌，那么人的 IMO 金牌还意味着什么？或许这正逼迫教育界重新思考：数学教育的根本目的，到底是培养“解题机器”，还是培养*有数学品味、有概念眼光的思考者*？

16.7　对数学哲学诸基本问题的回响

AI 的兴起以新的方式触及第一章提出的三大基本问题。

本体论上，AI 似乎是中性的——它既可以为柏拉图主义者提供支持（“连机器都能独立‘发现’相同的定理，可见数学真理客观存在”），也可以为形式主义者提供支持（“数学不过是可形式化的符号操作，AI 的成功正是证明”）。但更微妙的影响在于：AI 让“数学对象”的存在样态更加多样化——一个被神经网络“感知”到的猜想模式，与一个被形式化为 Lean 类型的定理，与一个被人类直觉把握到的概念，是三种不同的“存在方式”。本体论的图景变得更丰富，也更复杂。此外，AI 生成的猜想引出了一个新问题：如果一个数学命题最先由机器“发现”，然后被人类证明为真，那么这个命题在被发现之前“存在”吗？柏拉图主义者会说当然存在——机器只是碰巧先碰到了；但建构主义者可能追问：机器的“发现”过程（统计模式匹配）是否构成有效的数学建构？

认识论上，AI 引发的最深问题是：*当一个证明的关键步骤来自不可解释的神经网络，我们“理解”这个证明吗？*如果 AI 给出一个数千页的证明，每一步都被 Lean 验证，但没有人类能完整阅读——这是数学知识吗？这与 Thurston 的命题“数学的目的是人类的理解”形成尖锐张力。这里需要区分两种认识论标准。*验证主义标准*认为：只要每一步都可机械检验，整体就构成知识，无论是否有人“理解”全貌——四色定理的计算机证明已经树立了这一先例。*理解主义标准*则坚持：没有人类能把握的“证明思想”，就算不上真正的数学知识——正如 Thurston 所言，数学的目的不是定理的积累，而是人类理解的深化。AI 时代把这两种标准之间的张力推到了极限：我们可能不得不接受一种*分层的知识概念*——有些数学真理我们“知道其成立”但“不理解其原因”，就像我们“知道”四色定理为真，但至今没有人声称“理解”它为什么为真。

适用性问题则获得了新的维度。AI 本身是数学（线性代数、概率、优化）的产物，但当它反过来加速数学研究时，数学—工具—世界的三角关系发生了递归式的纠缠。维格纳所谓“数学不可思议的有效性”在 AI 时代被推到了新的层次：数学创造了能够创造数学的机器。这一递归

还有更深的一层：AI 系统内部使用的数学（梯度下降、反向传播、注意力机制）与它所"研究"的数学（拓扑、代数、数论）属于完全不同的层次。一个用随机梯度下降训练的模型"发现"了纽结不变量之间的关系——这里有两套数学在互动，而它们之间的关系本身就是一个未被探究的哲学问题。

16.8 Arnold/Grothendieck 之争在 AI 时代的回响

第九章与第十章描绘了 Arnold 与 Grothendieck 的深刻对立——一个向下扎根于物理直观，一个向上飞向抽象语言。AI 时代以一种意想不到的方式让这一对立重新激活。

一方面，AI 与 Grothendieck 路线存在天然亲和：高度抽象的范畴结构、纯形式化的语言、对"正确普遍性"的追求，这些都是机器最容易处理的对象。HoTT、∞-范畴、形式化 mathlib——这些 Grothendieck 之后的传统在 AI 时代获得了强大助力。

另一方面，AI 也意外强化了 Arnold 的部分诉求：当"技巧性证明"被机器轻易接管，留给人的就是*几何直觉、物理类比、不可形式化的洞见*。Arnold 一辈子捍卫的"看图、动手、与自然对话"的传统，在 AI 时代非但没有过时，反而可能成为人类数学家的核心比较优势。

如果说 20 世纪后期的张力是"Grothendieck 向上、Arnold 向下"，那么 21 世纪的图景可能是：**AI 占据中间地带——批量处理形式化的、可计算的、可结构化的部分——而人类数学家被推向两端：极抽象的概念发明，与极具体的几何—物理直观**。这两端反而比中间更难被机器替代。

16.9 风险与隐忧

AI 给数学带来的不全是希望。本节要诚实地指出几项风险。

第一，黑箱化与诚信。当证明的部分关键步骤来自不可解释的模型，数学的*透明性*受到挑战。Grothendieck 反复强调"数学的诚实"——而诚实首先意味着每一步可被追问、可被理解。AI 辅助下，论文中"此处由 X 模型生成"是否应当成为标准披露？目前数学共同体尚未形成共识。

第二，错觉式自信。 LLM 善于生成*听起来正确*的论证。学生与初级研究者面对一段流畅而错误的 AI 推理时，可能没有足够的辨别力。这种"似真而非"的产出比明显错误更危险，因为它绕过了批评性思考。

第三，传统的断裂。 Novikov 强调过*研讨班传统*——师徒之间口耳相传的活的思维。如果年轻数学家越来越多地与 AI 对话而非与导师对话，某些只能通过人际传承的"品味"是否会失传？这是一个还没有答案的问题。

第四，研究资源的集中化。训练前沿数学 AI 需要工业级算力，这种资源集中在少数大型科技公司与机构手中。数学研究——一项历来以低成本、个人化为特征的学科——是否会被迫接受新的资源依赖？这关系到数学共同体的社会结构。

16.10 展望：一种新的协作

尽管存在风险，AI 与数学的融合方向已不可逆转。问题不是"是否使用 AI"，而是"以什么样的方式使用，并保持数学作为人类活动的核心精神"。

或许 21 世纪后期的数学家形象会是这样：他/她持有 *Grothendieck* 式的概念眼光、*Arnold* 式的几何—物理直观、*Thurston* 式的对“人类理解”的关切，同时熟练运用 *AI* 与形式化工具。技术工具的角色将更类似于历史上印刷术、符号代数、计算器——它们没有取代数学家，而是改变了数学家是谁、做什么的边界。

数学哲学的所有基本问题——本体论、认识论、适用性——在 AI 时代都没有得到“最终答案”，反而被以更尖锐的方式重新提出。这正是数学哲学的活力之所在：每一次工具与方法的革新，都迫使我们重新追问那些最古老的问题。

结语：数学哲学的活力

我们的旅程到此结束。从毕达哥拉斯的"万物皆数"，到 Voevodsky 的同伦类型论，再到 21 世纪人工智能对数学研究与教育的冲击，两千五百多年的数学哲学呈现出一种惊人的图景：**这是一场尚未结束、也不会结束的对话**。

每一代数学家在工作时，都不自觉地处在某种哲学立场之中，即使他们自己并不知道。每一个数学进展，都既是技术成就，也是哲学事件。哥德尔不完备定理不只是逻辑结果，更是对希尔伯特哲学的回应；范畴论的诞生不只是数学技术，更是结构主义的胜利；HoTT 不只是新的形式系统，更是构造主义、结构主义、形式主义的当代合奏。

数学哲学的活力不在于得出最终答案，而在于不断提出更深的问题。*数学对象到底是什么？数学真理为何如此可靠？数学为何与物理世界如此契合？数学家在做什么时算是真正在做数学？*这些问题在每一代人那里都获得新的回答，而每一种新回答又带来新的问题。

如果本书帮助读者意识到：你日常使用的数学背后藏着如此丰富的哲学维度——那么本书的目的就达到了。希望它能成为你进一步思考、进一步阅读的起点。

延伸阅读

以下是各章涉及的部分关键文献，按章节列出，供有兴趣进一步探索的读者参考。

第 1–2 章引论与古典源头

- Plato. *Republic*, Book VII（《理想国》第七卷，洞穴比喻）.
- Kant, I. *Kritik der reinen Vernunft*（《纯粹理性批判》, 1781）.
- Kline, M. *Mathematics: The Loss of Certainty.* Oxford, 1980.

第 3 章中国古代数学

- 刘徽（注）.《九章算术注》, 263 年前后.
- 秦九韶.《数书九章》, 1247.
- 吴文俊（主编）.《中国数学史大系》. 北京师范大学出版社, 1998–2004.
- Needham, J. *Science and Civilisation in China*, Vol. 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Cambridge, 1959.
- Martzloff, J.-C. *A History of Chinese Mathematics.* Springer, 1997.

第 4 章柏拉图主义

- Hardy, G. H. *A Mathematician's Apology.* Cambridge, 1940.
- Gödel, K. "What is Cantor's Continuum Problem?" *American Mathematical Monthly*, 1947.
- Benacerraf, P. "Mathematical Truth." *Journal of Philosophy*, 1973.
- Penrose, R. *The Road to Reality.* Knopf, 2004.

第 5 章逻辑主义

- Frege, G. *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884.
- Russell, B. & Whitehead, A. N. *Principia Mathematica*, 1910–1913.
- Hale, B. & Wright, C. *The Reason's Proper Study.* Oxford, 2001.

第 6 章形式主义

- Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, 1899.
- Hilbert, D. "Über das Unendliche." *Mathematische Annalen*, 1926.
- Bourbaki, N. *Éléments de mathématique*, 1939–.

第 7 章直觉主义与构造主义

- Poincaré, H. *La Science et l'hypothèse*, 1902；*Science et méthode*, 1908.
- Weyl, H. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Veit, 1918.
- Weyl, H. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik." *Mathematische Zeitschrift*, 1921.

- Weyl, H. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 1927；英译 *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, 1949.
- Brouwer, L. E. J. *Collected Works, Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics.* North-Holland, 1975.
- Heyting, A. *Intuitionism: An Introduction.* North-Holland, 1956.
- Bishop, E. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, 1967.

第 8 章结构主义

- Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 1971.
- Awodey, S. *Category Theory.* Oxford, 2010.
- Shapiro, S. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* Oxford, 1997.

第 9 章俄罗斯学派

- Arnold, V. I. "On Teaching Mathematics." Paris lecture, 1997.
- Arnold, V. I. *Huygens & Barrow, Newton & Hooke.* Birkhäuser, 1990.
- Novikov, S. P. "The Second Half of the 20th Century and its Conclusion." *Russian Math. Surveys*, 2006.

第 10 章 Grothendieck

- Grothendieck, A. *Récoltes et Semailles*（《收获与播种》，写于 1983–1986；由 Gallimard 正式出版，2022）.
- Cartier, P. "A Mad Day's Work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich." *Bulletin of AMS*, 2001.
- Scharlau, W. *Wer ist Alexander Grothendieck?*（三卷本传记）, 2007–2010.

第 11 章 Atiyah

- Atiyah, M. "The Art of Mathematics." *Notices of the AMS*, 2010.
- Atiyah, M. & Singer, I. M. "The Index of Elliptic Operators." *Annals of Mathematics*, 1968–1971 (series of papers).
- Atiyah, M. "Mathematics in the 20th Century." *American Mathematical Monthly*, 2001.
- Farmelo, G. (ed.) *It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science.* Granta, 2002 (chapter by Atiyah on the Dirac equation).

第 12 章准经验主义与 HoTT

- Lakatos, I. *Proofs and Refutations.* Cambridge, 1976.
- The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* IAS, 2013.
- Voevodsky, V. "An Experimental Library of Formalized Mathematics." *Math. Struct. in Comp. Sci.*, 2014.

第 13 章对“解题为王”叙事的反思

- Thurston, W. P. “On Proof and Progress in Mathematics.” *Bulletin of AMS*, 1994.
- Gowers, T. “The Two Cultures of Mathematics.” In *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, AMS, 2000.
- Atiyah, M. “How Research Is Carried Out.” *Bulletin of the IMA*, 1974.
- Hilbert, D. “Mathematical Problems.” Address to the ICM, Paris, 1900.
- Castelvecchi, D. “The Biggest Mystery in Mathematics: Shinichi Mochizuki and the Impenetrable Proof.” *Nature*, 2015.

第 14 章数学的出版、传播与共同体

- Bourbaki, N. *Éléments de mathématique.* Hermann (后转 Springer), 1939–。
- Grothendieck, A. & Dieudonné, J. *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA). *Publ. Math. IHÉS*, 1960–1967.
- Grothendieck, A. *Récoltes et Semailles.* 写于 1983–1986，长期以打印稿形式流传；2022 年由 Gallimard 正式出版。
- Gowers, T. & Nielsen, M. “Massively Collaborative Mathematics.” *Nature*, 2009（关于 Polymath 项目）。
- The mathlib Community. “The Lean Mathematical Library.” *CPP*, 2020.
- Scholze, P. “Liquid Tensor Experiment.” Blog post, Xena Project, 2020；及后续 mathlib 形式化报告 (2022)。
- Castelvecchi, D. “Mathematical proof that rocked number theory will be published.” *Nature*, 2020（关于 abc/Mochizuki/PRIMS）。

第 15 章比较与综合

- 本章综合前面各章的材料，参见上述各章参考文献。

第 16 章人工智能时代的数学

- Tao, T. “Embracing change and resetting expectations.” Blog post / Microsoft Research Forum, 2024.
- Trinh, T. H. et al. “Solving olympiad geometry without human demonstrations.” *Nature*, 2024 (AlphaGeometry).
- Davies, A. et al. “Advancing mathematics by guiding human intuition with AI.” *Nature*, 2021.
- Castelvecchi, D. “DeepMind AI rivals top human mathematicians at solving olympiad problems.” *Nature*, 2024.
- Buzzard, K. “The future of mathematics?” Talk and writings on Lean / mathlib, 2020–.

综合读物

- Davis, P. & Hersh, R. *The Mathematical Experience.* Birkhäuser, 1981.
- Tymoczko, T. (ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Princeton, 1998.

- Mazur, B. “When is one thing equal to some other thing?” 2007.